

**SUR LES REPRESENTATIONS H-DIAGONALES
DES ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES**

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

Olivier BOREL
Licencié ès sciences mathématiques

Février 1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**SUR LES REPRESENTATIONS H-DIAGONALES
DES ALGEBRES DE LIE SEMI-SIMPLES**

T H E S E

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences

par

Olivier BOREL
Licencié ès sciences mathématiques

Février 1972

IMPRIMATUR POUR LA THÈSE

Sur les représentations H-diagonales des
algèbres de Lie semi-simples

de M. Olivier Borel

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

FACULTÉ DES SCIENCES

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel,
sur le rapport de Messieurs les professeurs

W. Sörensen, R. Bader et A. Robert

autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, le 5 juin 1972

Le doyen :

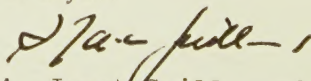

A. Jacot-Guillarmod

TABLE DES MATIERES.

Chapitre I	. <u>Algèbres de Lie semi-simples complexes.</u>	page 1
	1. Semi-simplicité.	1
	2. Sous-algèbres de Cartan et structure de $\mathfrak{g}$.	2
	3. Automorphismes. Groupe de Weyl.	5
Chapitre II	. <u>La représentation adjointe.</u>	8
	1. Notations et rappels . Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.	8
	2. Prolongements de la représentation adjointe.	12
	3. La décomposition $U = \mathfrak{Z} \oplus [U, U]$.	14
	4. La décomposition $U = U(\mathfrak{h}) + [U, U]$.	15
	5. La décomposition $U = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi$. L'algèbre U^0 .	19
Chapitre III	. <u>Représentations $\mathfrak{h}$-diagonales.</u>	27
	1. Existence d'un caractère infinitésimal.	27
	2. Poids et représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales.	29
	3. Classification des représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.	41
	4. Exemples de représentations non $\mathfrak{h}$ -diagonales.	47
	5. Existence de représentations irréductibles $\mathfrak{h}$ -diagonales : les représentations admettant un poids dominant .	50
Bibliographie		53

INTRODUCTION

Parmi les représentations d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, celles qui admettent un poids dominant sont bien connues. [Harish-Chandra Trans. Amer. Math. soc 70 (1951)]. L'étude de familles plus vastes de représentations et la généralisation de la construction de représentations admettant un poids dominant a été abordée par I.Z. Bouwer [2] et F.W. Lemire [7]. En reprenant leurs travaux, il nous a été permis, grâce à un résultat de J. Dixmier ([3] p. 493) d'obtenir certaines caractérisations de la classe des représentations qui admettent une décomposition en sous-espaces de poids, que nous appelons ici $\mathfrak{h}$ -diagonales.

Nous avons tout d'abord caractérisé les idéaux à gauche maximaux M de l'algèbre enveloppante U de $\mathfrak{g}$ tels que U/M soit un U -module associé à une représentation $\mathfrak{h}$ -diagonale (Chapitre III prop. 2.8). Ce critère permet de donner des exemples de représentations non $\mathfrak{h}$ -diagonales (paragraphe III.4). Puis en développant une technique, déjà indiquée dans Lemire [7], d'induction des représentations de U à partir de celles du centralisateur U^0 de $\mathfrak{h}$ dans U , nous avons montré que les représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales de $\mathfrak{g}$ sont exactement celles qui sont induites à partir des représentations irréductibles de U^0 (th. 3.12 Chap. III); au paragraphe III.5 on donne une précision de ce résultat concernant les représentations admettant un poids dominant. Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ceci donne très directement la classification des représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. W. Sørensen qui m'a dirigé tout au long de ce travail. Pour ses suggestions, ses conseils précieux et sa constante disponibilité, qu'il accepte ici l'expression de ma profonde gratitude. Mes remerciements vont également à M.M. R. Bader et A. Robert pour l'aide qu'ils m'ont apportée par leurs remarques et l'intérêt qu'ils m'ont témoigné.

I. ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES COMPLEXES.

Dans ce paragraphe nous rappelons sans démonstration quelques faits de base concernant la théorie des algèbres de Lie semi-simples complexes de dimension finie que nous supposerons connus. Pour avoir plus de détails et les démonstrations complètes, on pourra consulter le texte de I. STEWART [13], pas très complet, mais qui permet d'avancer rapidement, les livres de J.P. SERRE [11] et [12], N. BOURBAKI [1], S. HELGASON [4], et enfin le Séminaire Sophus LIE [10].

1. Semi-simplicité.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite semi-simple si son radical - i.e. son plus grand idéal résoluble - est réduit à zéro, ou, ce qui revient au même, si son plus grand idéal abélien est nul.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est dite simple si elle n'a pas d'idéaux non triviaux et si elle n'est pas abélienne.

On vérifie immédiatement qu'une algèbre de Lie semi-simple est de dimension trois au moins, et qu'il n'y a qu'une algèbre de Lie semi-simple de dimension 3, qui est l'algèbre simple $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ des matrices 2×2 de trace nulle.

D'autres définitions équivalentes de la semi-simplicité sont données par les résultats suivants :

Théorème (1.1) (Critère de Cartan-Killing) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad } X \circ \text{ad } Y)$ est non dégénérée.

Théorème (1.2) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si elle est isomorphe à un produit d'algèbres de Lie simples (qui sont les idéaux minimaux non nuls de $\mathfrak{g}$; la décomposition est unique).

Théorème (1.3) (H. Weyl) Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si toutes les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sont complètement réductibles.

2. Sous-algèbres de Cartan et structure de $\mathfrak{g}$.

On appelle sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est abélienne maximale et formée d'éléments semi-simples - i.e. dont l'image par ad est diagonalisable. On en démontre l'existence en prouvant que si $X \in \mathfrak{g}$ est un élément régulier (J.P. Serre [12] p. II-2) le sous-espace propre $\mathfrak{g}_X^0$ associé à la valeur propre 0 de $\text{ad } X$ est précisément une sous-algèbre de Cartan. On sait de plus que toute sous-algèbre de Cartan est de la forme $\mathfrak{g}_X^0$ pour un X régulier et que le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ noté $\text{Int}(\mathfrak{g})$ - il est engendré par les automorphismes de la forme $e^{\text{ad } X}$, $X \in \mathfrak{g}$ - opère transitivement dans l'ensemble des sous-algèbres de Cartan. En particulier, les sous-algèbres de Cartan ont toutes même dimension, égale au rang l de $\mathfrak{g}$ (voir J.P. Serre [12] chap. III, ou le Séminaire S. Lie [10] exposé 15).

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan, la restriction à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée.

Soit maintenant $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, fixée une fois pour toutes. La restriction à $\mathfrak{h}$ de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$: $H \mapsto \text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)X = [H, X]$ $H \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}$, se décompose complètement. On appelle racines les représentations irréductibles de $\mathfrak{h}$ non nulles - ce sont des formes linéaires $\neq 0$ sur $\mathfrak{h}$ - qui apparaissent dans la décomposition de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$; on note Δ l'ensemble (fini) des racines, et $\mathfrak{g}^\alpha$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ des vecteurs qui se transforment selon $\alpha \in \Delta$. La décomposition de $\mathfrak{g}$ est alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha \right)$$

les sous-espaces $\mathfrak{g}^\alpha$ sont de dimensions 1, on a donc, pour $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$

$$\text{ad}(H)X_\alpha = [H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha;$$

la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est le sous-espace de la représentation nulle de $\mathfrak{h}$. Si $\alpha \in \Delta$, alors $-\alpha \in \Delta$, et $\alpha, -\alpha$ sont les deux seules racines colinéaires à α .

Puisque la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée sur $\mathfrak{h}$, on peut définir pour chaque $\alpha \in \Delta$, l'élément $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ (unique) tel que

$$\alpha(H) = B_{\mathfrak{g}}(H, h_\alpha)$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$; les éléments h_α engendrent $\mathfrak{h}$.

$$\text{Les relations} \quad [\sigma_j^\alpha, \sigma_j^{-\alpha}] = \mathbb{C} \cdot h_\alpha$$

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_j^\beta] = \sigma_j^{\alpha+\beta} \quad \text{si } \alpha+\beta \in \Delta$$

$$[\sigma_j^\alpha, \sigma_j^\beta] = 0 \quad \text{si } \alpha+\beta \neq 0 \text{ et } \alpha+\beta \notin \Delta$$

montrent que si on prend une base $\{h_1, h_2, \dots, h_\ell\}$ de $\mathfrak{h}$ parmi les éléments h_α , et pour chaque paire $(\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \Delta$ on choisit $E_\alpha \in \sigma_j^\alpha$ et $E_{-\alpha} \in \sigma_j^{-\alpha}$ de telle sorte que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = h_\alpha$, on obtient une base, dite "base de Weyl provisoire" qui vérifie les relations :

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 & 0 \leq i, j \leq \ell' \\ [h_i, E_\alpha] &= \alpha(h_i) E_\alpha & \alpha \in \Delta, 0 \leq i \leq \ell \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= h_\alpha & \alpha \in \Delta \\ [E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} 0 & \alpha+\beta \neq 0 \quad \alpha+\beta \notin \Delta \\ N_{\alpha, \beta} \cdot E_{\alpha+\beta} & \alpha+\beta \in \Delta \end{cases} \end{aligned}$$

De la rationalité des nombres $B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\beta)$ $\alpha, \beta \in \Delta$, (voir par exemple Stewart [13] p. 26) on déduit que $\tilde{\mathfrak{h}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} \cdot h_\alpha$ est une forme réelle de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{h}$ et que $B_{\mathfrak{g}}$ restreinte à $\tilde{\mathfrak{h}} \times \tilde{\mathfrak{h}}$ est une forme bilinéaire réelle, définie positive. On a donc une métrique canonique pour étudier la figure formée par les racines dans le dual réel $\tilde{\mathfrak{h}}^*$ de $\tilde{\mathfrak{h}}$; ceci conduit à la classification des systèmes de racines et à la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes (voir aussi le N° 3 ci-dessous).

Choisissons maintenant une base de $\tilde{\mathfrak{h}}$, munissons Δ de l'ordre lexicographique associé à cette base et notons Δ^+ l'ensemble des racines positives. On a $\Delta = \Delta^+ \cup -\Delta^+$. Une racine positive est dite simple si elle n'est pas somme de deux racines positives.

Théorème (2.1) Les racines simples forment une base $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ du dual $\mathfrak{h}^*$ telle que toute racine $\alpha \in \Delta$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$$

où les coefficients n_i sont des entiers tous de même signe.

Une base qui possède cette propriété est appelée un système simple de racines ou système fondamental de racines. Le théorème précédent montre l'existence d'un tel système.

Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ un système simple de racines de $\mathfrak{g}$ et Δ^+ les racines positives qui lui correspondent.

Posons

$$H_\alpha = \frac{2h_\alpha}{B_{\mathfrak{g}}(h_\alpha, h_\alpha)}, \quad \alpha \in \Delta$$

$-H_\alpha$ est donc l'unique élément de $\mathbb{C} \cdot h_\alpha$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$ — et choisissons pour chaque $\beta \in \Delta^+$, $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$ et $Y_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$ tels que

$$[X_\beta, Y_\beta] = H_\beta.$$

On dit alors que

$$\{Y_\beta, \beta \in \Delta^+, H_i = H_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Sigma, X_\beta, \beta \in \Delta^+\}$$

est une base de Cartan. Les relations sont celles d'une base de Weyl provisoire, modifiées de façon évidente ; pour chaque $\beta \in \Delta^+$ la sous-algèbre $\mathfrak{s}_\beta$ engendrée par Y_β, H_i, X_β est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (voir l'exemple ci-dessous) puisqu'alors

$$[H_\beta, X_\beta] = 2X_\beta; \quad [H_\beta, Y_\beta] = -2Y_\beta; \quad [X_\beta, Y_\beta] = H_\beta.$$

Ces relations sont naturellement très commodes pour l'étude des représentations de $\mathfrak{g}$ qui admettent des poids.

Exemple (2.2) L'algèbre de Lie

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{\text{matrices } n \times n \text{ complexes de trace nulle}\}$ est semi-simple. La sous-algèbre

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}$$

est une sous-algèbre de Cartan, et si on note

$$E_q^p = p \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} \lambda_1(H) & & 0 \\ & \lambda_2(H) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n(H) \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(H) = 0$$

on a $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(H) E_q^p = (\lambda_p(H) - \lambda_q(H)) E_q^p$.

Il en résulte donc que les racines sont les formes

$$\lambda_p - \lambda_q : H \mapsto \lambda_p(H) - \lambda_q(H) \quad p \neq q$$

et que $\mathfrak{g}^{\lambda_p - \lambda_q} = \mathbb{C} \cdot E_q^p$

Les racines $\Sigma = \{\lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1\}$ forment un système simple et $\Delta^+ = \{\lambda_p - \lambda_q, \quad p < q\}$ est l'ensemble des racines positives correspondantes.

On a : $[E_q^p, E_q^q] = E_p^p - E_q^q, \quad p \neq q,$

et par définition $(\lambda_p - \lambda_q)(E_p^p - E_q^q) = 2$. La base

$$\{E_q^p, \quad p > q, \quad H_i = E_i^i - E_{i+1}^{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad E_q^p, \quad p < q\}$$

est donc une base de Cartan de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

3. Automorphismes, groupe de Weyl.

Soit A un automorphisme de $\mathfrak{g}$ qui stabilise la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, i.e. tel que $A(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, et posons

$$\alpha^A(H) = \alpha(A^{-1}(H)) \quad \text{pour } H \in \mathfrak{h}.$$

On vérifie facilement que α^A est une racine et que $A h_\alpha = h_{\alpha^A}$, $A(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\alpha^A}$.

L'automorphisme A induit donc une permutation des racines dans le dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. Il existe une réciproque importante.

Théorème (3.1). (H. Weyl). Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie semi-simples complexes, $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}'$) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$) et $\tilde{\mathfrak{h}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} \cdot h_\alpha$, $\tilde{\mathfrak{h}}' = \sum_{\alpha' \in \Delta'} \mathbb{R} \cdot h_{\alpha'}$. Si $\phi : \tilde{\mathfrak{h}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}'$ est un isomorphisme linéaire tel que ϕ applique Δ' sur Δ , alors ϕ se prolonge non univoquement en un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$.

La démonstration revient tout d'abord à montrer que ϕ est nécessairement isométrique pour les métriques canoniques sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}'$, ce qui implique que si $\alpha^\phi = {}^t\phi^{-1} \alpha$, alors $\phi(h_\alpha) = h_{\alpha^\phi}$; puis, étant donné $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, à déterminer $E_{\alpha^\phi} \in \mathfrak{g}'^{\alpha^\phi}$ tel qu'en posant $\check{\phi}(E_\alpha) = E_{\alpha^\phi}$ on définisse un isomorphisme d'algèbre de Lie (voir S. Helgason th 5.4 p. 148 ou le Séminaire S. Lie [10] p. 11.-04).

Indiquons certaines conséquences de ce théorème.

- 1°) On peut classer les algèbres de Lie semi-simples complexes en classant les systèmes de racines Δ .
- 2°) Les isomorphismes linéaires $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ tels que ${}^t\phi(\Delta) = \Delta$, se prolongent (non univoquement) en automorphismes de $\mathfrak{g}$.
- 3°) Il existe une base de Weyl de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire une "base de Weyl provisoire" avec la propriété supplémentaire

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}, \quad N_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$$

$$N_{\alpha, \beta}^2 = \frac{q(1-p)}{2} \alpha(h_\alpha)$$

où p et q sont déterminés par la position relative de α et β dans Δ . Une telle base résulte de l'existence d'un automorphisme $\check{\phi}$ de $\mathfrak{g}$ qui prolonge $\phi : H \rightarrow -H$, $H \in \tilde{\mathfrak{g}}$ est d'une base qui vérifie $\check{\phi}(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$.

- 4°) Il existe une "forme réelle compacte" de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire une algèbre de Lie réelle dont $\mathfrak{g}$ est la complexifiée, et qui est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie (réel) compact.

L'importance de ce dernier point est claire. De là vient en effet la possibilité de remonter à un groupe compact pour démontrer, de façon analytique il est vrai, certaines propriétés des représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples complexes, notamment :

- a) la complète réductibilité des représentations de dimension finie (théorème (1.3), démonstration initiale de H. Weyl).
- b) l'existence de poids pour les représentations de dimension finie (et pour n'importe quelle sous-algèbre de Cartan) (proposition(2.6) ch.III).

et l'invariance du système des poids par les automorphismes intérieurs qui stabilisent $\mathfrak{h}$, donc par le "groupe de Weyl" défini ci-dessous.

- c) La formule des caractères des représentations de dimension finie irréductibles (démonstration initiale de H. Weyl, voir le Séminaire S. Lie [10] p. 21 - 06 et suivants).

Cette procédure de démonstration, dont le point 4') est à la base, porte le nom de "Unitarian trick".

On sait, théorème (3.1), que les applications linéaires $\phi: \tilde{\mathfrak{h}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{h}}$ qui stabilisent Δ sont nécessairement des isométries pour la métrique induite sur $\tilde{\mathfrak{h}}$ par la forme de Killing $B_{\mathfrak{g}}$. Parmi ces applications, les "symétries de vecteurs α " définies par

$$S_{\alpha}(H) = H - 2 \frac{B_{\mathfrak{g}}(H, h_{\alpha})}{B_{\mathfrak{g}}(h_{\alpha}, h_{\alpha})} h_{\alpha} = H - \alpha(H) H_{\alpha} \quad , \alpha \in \Delta ,$$

pour $H \in \mathfrak{h}$, jouent un rôle particulier. On a en effet :

Théorème (3.2). Le sous-groupe des transformations linéaires de $\mathfrak{h}$ induit par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ qui stabilisent $\mathfrak{h}$ coïncide avec le groupe des transformations engendrées par les symétries S_{α} , $\alpha \in \Delta$.

Le groupe (fini) engendré par les symétries S_{α} , $\alpha \in \Delta$ est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$. L'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui prolongent l'identité sur $\mathfrak{h}$ est le groupe des automorphismes intérieurs de la forme $e^{\text{ad}(H)}$, $H \in \mathfrak{h}$ et noté $e^{\text{ad}(\mathfrak{h})}$. L'invariance par le groupe de Weyl traduit donc l'invariance par les automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$.

II. LA REPRÉSENTATION ADJOINTE.

1. Notations et rappels. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Dans tout ce qui suit, nous ne travaillons toujours qu'avec le corps des complexes. Les faits qui suivent - on en trouve la démonstration soit dans Bourbaki [1], soit dans le Séminaire Sophus Lie [10] - sont cependant valables avec des conditions moins restrictives sur le corps. Les notations sont aussi proches que possible de celles de Bourbaki.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note :

$$T = \bigoplus_{p \geq 0} T^p, \text{ l'algèbre tensorielle de } \mathfrak{g} \text{ (} T^0 = \mathbb{C}; T^p = \bigotimes_1^p \mathfrak{g} \text{)};$$

$$J = \text{l'idéal bilatère engendré par les éléments } x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

$$I = \text{ " " " " " " } x \otimes y - y \otimes x \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

$$U = T/J \text{ l'algèbre enveloppante de } \mathfrak{g};$$

$$S = T/I \text{ " symétrique de } \mathfrak{g}.$$

On note aussi $T(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{g})$, $S(\mathfrak{g})$, etc., les algèbres ci-dessus lorsqu'il y a risque de confusion.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ s'injecte canoniquement dans T ($\mathfrak{g} \cong T^1$). Par composition avec la projection $T \xrightarrow{\pi} T/J$ on obtient une application $\sigma_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow U$ qui est un homomorphisme d'algèbre de Lie. Pour toute représentation (π, V) de $\mathfrak{g}$, il existe une représentation $(\tilde{\pi}, V)$ unique de U vérifiant $\tilde{\pi}(1) = \text{Id}_V$ et telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\pi} & \text{End } V \\ \sigma_{\mathfrak{g}} \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ U & & \end{array}$$

est commutatif (propriété universelle de U).

On note $T_p = \bigoplus_{m \leq p} T^m$ et U_p l'image canonique dans U de T_p .

Par passage au quotient, les inclusions $T_{p-1} \subset T_p$, $T_p \otimes T_m \subset T_{p+m}$

fournissent une filtration canonique de l'algèbre U : On a

$$U = \bigcup_{p \geq 0} U_p, U_{p-1} \subset U_p, U_p \otimes U_q \subset U_{p+q}. \text{ Soit } G^p = U_p / U_{p-1} \text{ et } G = \bigoplus_{p \geq 0} G^p$$

l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée U . On vérifie facilement que G est commutative (voir N. Jacobson [5] p. 166).

S est une algèbre commutative, et si $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, S est isomorphe à l'algèbre des polynômes formels (commutatifs)

$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. On a $I = \bigoplus_{p \geq 1} I \cap T^p$; les éléments de $S^p \cong T^p / I \cap T^p$ (image canonique de T^p dans S) sont les éléments homogènes de degré p dans S , ils correspondent aux polynômes homogènes de degré p de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Il est clair que $S = \bigoplus_{p \geq 0} S^p$. On rappelle que si S'^p est le sous-espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre p dans T , S'^p est un supplémentaire de $I \cap T^p$ dans T^p . La restriction à S'^p de l'application quotient $T^p \longrightarrow S^p$ est donc un isomorphisme linéaire, d'où l'existence d'un isomorphisme linéaire entre S et $S' = \bigoplus_{p \geq 0} S'^p$.

Introduisons encore des notations pour les projections canoniques :

$$\psi : T \longrightarrow U \text{ et } \psi_p : T^p \longrightarrow U_p \text{ la restriction de } \psi \text{ à } T^p$$

$$\tau : T \longrightarrow S \text{ et } \tau_p : T^p \longrightarrow S^p \quad " \quad " \quad " \quad \tau \text{ à } T^p$$

$$\theta_p : U_p \longrightarrow G^p \text{ et}$$

$$\varphi_p : \theta_p \circ \psi_p : T^p \xrightarrow{\psi_p} U_p \xrightarrow{\theta_p} G^p.$$

On vérifie facilement que les φ_p , $p \geq 0$, définissent un homomorphisme surjectif d'algèbre $\varphi : T \longrightarrow G$, et que τ factorise φ . Autrement dit, il existe un morphisme surjectif $\omega : S \longrightarrow G$ tel que $\varphi = \omega \circ \tau$. On a $\omega(S^p) = G^p$ et on note $\omega_p : S^p \longrightarrow G^p$ la restriction à S^p de ω . En résumé on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & U_p & & \\ & \nearrow \psi_p & & \searrow \theta_p & \\ T^p & \xrightarrow{\varphi_p} & & & G^p \\ & \searrow \tau_p & & \nearrow \omega_p & \\ & & S^p & & \end{array}$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt s'exprime alors comme suit :

Théorème (1.1) L'application $\omega : S \longrightarrow G$ est un isomorphisme d'algèbre.

Ce théorème - abrégé P.B.W. dans la suite - a de nombreuses conséquences faciles :

Corollaire (1.2) Si W^P est un supplémentaire de $I \cap T^P$ dans T^P alors ψ_P restreint à W^P est un isomorphisme de W^P sur un supplémentaire de U_{p-1} dans U_p .

Corollaire (1.3) L'application canonique de $\mathfrak{g}$ dans U est injective.

Corollaire (1.4) (P.B.W. habituel)

Soit $x_1, \dots, x_n$ une base de $\mathfrak{g}$. Les éléments $x_{\lambda_1} \cdot x_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_{\lambda_p}$ de U , où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ parcourent les suites finies croissantes quelconques d'éléments de $[1, 2, \dots, n]$ forment une base de U .

Nous utiliserons parfois le résultat suivant qui se démontre comme le corollaire (1.4)

Corollaire (1.4') Soit $x_1, \dots, x_n$ une base de $\mathfrak{g}$ et $(x_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_{\lambda_p})_{\lambda}$ la base associée de U selon le corollaire (1.4) (i.e. $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ parcourent les suites finies croissantes d'éléments de $[1, n]$). La famille d'éléments de U , obtenue en prenant chacun des éléments de la base de U ci-dessus et en permutant les facteurs d'une manière quelconque, est encore une base de U .

Corollaire (1.5) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. $U(\mathfrak{h})$ s'injecte canoniquement dans $U(\mathfrak{g})$.

Corollaire (1.6) Si $\mathfrak{g}$ est somme directe des sous-algèbres $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ et si $U = U(\mathfrak{g})$, $U_i = U(\mathfrak{g}_i)$, le relèvement unique de l'application multilinéaire

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto u_1 \cdot \dots \cdot u_n$$

de $U_1 \times \dots \times U_n$ dans U , est un isomorphisme de $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$ sur U .

Corollaire (1.7) U est sans diviseurs de zéro .

Corollaire (1.8) Les seuls éléments inversibles de U sont les scalaires $\neq 0$.

Le théorème de P.B.W. permet finalement de construire l'application $\eta: S \longrightarrow U$ dont nous aurons besoin par la suite.

Corollaire (1.9) Soit S^p le sous-espace des tenseurs symétriques d'ordre p dans T . On sait (page 9) que la restriction à S^p de l'application quotient $\tau: T \longrightarrow S$ fournit un isomorphisme linéaire de S^p sur S^p . L'application η_p définie par commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & U_p \\ & \nearrow \psi_p & \uparrow \eta_p \\ S^p & & \\ & \searrow \tau_p & \\ & & S^p \end{array}$$

est un isomorphisme de S^p sur un supplémentaire de U_{p-1} dans U_p .

Ceci est clair à partir du corollaire (1,2) . Notons $U^p = \eta_p(S^p)$. On a $U = \bigoplus_{p \geq 0} U^p$ et $S = \bigoplus_{p \geq 0} S^p$, et par conséquent les η_p définissent un isomorphisme vectoriel $\eta: S \longrightarrow U$.

Soient $x_1, \dots, x_p$ p éléments de $\mathfrak{g}$, et $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_p$ leur produit dans S . On a

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_p = \tau_p \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)} \right)$$

(La sommation est prise sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$) d'où la formule

$$\eta_p(x_1 \cdot \dots \cdot x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}$$

où, dans le membre de droite, les produits sont dans U . Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ et si $U(\mathfrak{h})$ (resp. $S(\mathfrak{h})$) est considérée comme injectée dans $U(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g})$) cette formule montre que l'application η identifie $S(\mathfrak{h})$ à $U(\mathfrak{h})$.

2. Prolongement de la représentation adjointe.

Soit V un espace vectoriel, A un endomorphisme de V et T l'algèbre tensorielle de V . On vérifie facilement (Bourbaki [1] §2 N° 8) l'existence d'une dérivation $\tilde{A}$ de T qui prolonge A . $\tilde{A}$ est construite comme suit :

dans T^0 , $\tilde{A}$ est nulle ;

dans $T^p = \bigotimes_1^p V$, $\tilde{A}$ est l'unique relèvement de l'application multilinéaire

$$(\xi_1, \dots, \xi_p) \longmapsto \sum_{i=1}^p \xi_1 \otimes \dots \otimes A\xi_i \otimes \dots \otimes \xi_p$$

de $\prod_1^p V$ dans $\bigotimes_1^p V$. Par conséquent

$$\tilde{A}(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p) = \sum_{i=1}^p \xi_1 \otimes \dots \otimes A\xi_i \otimes \dots \otimes \xi_p.$$

$\tilde{A}$ est l'unique dérivation de T qui prolonge A , et $\tilde{A}$ commute aux opérateurs de symétrie dans T^p , donc S^p est invariant par $\tilde{A}$.

Identifions dès à présent σ à son image canonique dans T , U , S .

Soit $g \in \sigma$ et $\text{ad}_T(g)$ la dérivation de T qui prolonge $\text{ad}(g)$ ($\in \text{End } \sigma$).

L'application $\text{ad}_T : g \longmapsto \text{ad}_T(g)$

est clairement une représentation de σ : c'est la représentation adjointe de σ dans T .

L'idéal J est stable par $\text{ad}_T(g)$. En effet, l'image par $\text{ad}_T(g)$ d'un élément de J est une somme d'éléments de J puisque

$$\begin{aligned} \text{ad}_T(g)(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) &= [g, x] \otimes y - y \otimes [g, x] - [[g, x], y] \\ &\quad + x \otimes [g, y] - [g, y] \otimes x - [x, [g, y]]. \end{aligned}$$

La représentation ad_T induit sur le quotient $U = T/J$ on obtient la représentation adjointe de σ dans U , notée ad_U .

On a (les produits sont dans U) :

$$\begin{aligned} \text{ad}_U(g) \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p &= \sum_{i=1}^p \varepsilon_1 \cdots [\varepsilon_i, g] \cdots \varepsilon_p \\ &= (g\varepsilon_1 - \varepsilon_1 g) \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p \\ &\quad + \varepsilon_1 (g\varepsilon_2 - \varepsilon_2 g) \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_p \\ &\quad + \cdots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1} (g\varepsilon_p - \varepsilon_p g) \\ &= g \cdot \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p - \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p \cdot g \end{aligned}$$

pour $g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \mathfrak{g}$, d'où la formule

$$\text{ad}_U(g) u = gu - ug \quad \text{pour } g \in \mathfrak{g}, u \in U.$$

Puisque $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie abélienne sur l'espace $\mathfrak{g}$, on a de même une représentation de $\mathfrak{g}$ dans S prolongeant $\text{ad} : \underline{\text{c'est la représentation adjointe de } \mathfrak{g} \text{ dans } S}$ notée ad_S . On a,

pour $g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_S(g) \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p = \sum_{i=1}^p \varepsilon_1 \cdots [\varepsilon_i, g] \cdots \varepsilon_p$$

(produits dans S).

Enfin, on a vu que J, I et S' sont stables par ad_T . Or $T = S' \oplus I$ et $T = S' \oplus J$, cette dernière égalité venant du fait que $\gamma_p : S'^p \longrightarrow U^p$ est un isomorphisme linéaire ($N^\circ 1$ P.B.W. Cor(1.9)). Par conséquent, les représentations $\text{ad}_{T/S'}$ et ad_U de même que ad_S et $\text{ad}_{T/S}$ sont équivalentes, les opérateurs d'entrelacements étant les restrictions $\gamma_{/S'}$ et $\tau_{/S}$, des applications quotients $\gamma : T \longrightarrow T/J = U$ et $\tau : T \longrightarrow T/I = S$. Il en résulte que ad_U et ad_S sont équivalents, l'opérateur d'entrelacement étant l'isomorphisme linéaire $\eta : S \longrightarrow U$ (voir $N^\circ 1$) ; on a donc :

$$\eta \circ \text{ad}_S(g) = \text{ad}_U(g) \circ \eta$$

pour tout $g \in \mathfrak{g}$.

Notons que, d'après ce qui précède, T^p, T_p, S^p , sont des sous-espaces stables de la représentation ad_T , que U_p et U^p sont stables pour ad_U et que S^p est stable pour ad_S . La stabilité de U_p se voit d'ailleurs directement sur la formule

$$\text{ad}_U(g)g_1 = \varepsilon_p - \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \cdot [\varepsilon, \varepsilon_i] \cdot \varepsilon_p$$

qui montre que l'opérateur $\text{ad}_U(g)$, $g \in \mathfrak{g}$, n'augmente pas le degré du polynôme.

3. La décomposition $U = \mathfrak{z} \oplus [U, U]$.

Dès à présent $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Lemme (3.1) La représentation ad_U est complètement réductible.

Démonstration. La restriction à U_p de ad_U est une représentation de dimension finie donc complètement réductible (Théorème de Weyl). Soit V un sous-espace invariant dans $U = \bigcup_{p \geq 0} U_p$; l'espace $V \cap U_p$ est stable et possède donc un supplémentaire invariant dans U_p , disons V'_p .

Montrons qu'on peut construire un supplémentaire invariant V'_{p+1} de $V \cap U_{p+1}$ dans U_{p+1} qui contient V'_p . En effet $(V \cap U_{p+1}) \cap V'_p = \{0\}$ donc $(V \cap U_{p+1}) \oplus V'_p$ est stable et possède un supplémentaire invariant $\tilde{V}'_{p+1}$ dans U_{p+1} . L'espace $V'_{p+1} = V'_p \oplus \tilde{V}'_{p+1}$ est un supplémentaire invariant de $V \cap U_{p+1}$ dans U_{p+1} qui contient V'_p . Par récurrence à partir de U_0 , on construit ainsi un supplémentaire invariant V' de V en posant $V' = \bigcup_{p \geq 0} V'_p$.

Lemme (3.2) Soit V un espace vectoriel (de dimension quelconque), $\mathcal{A}$ une famille d'endomorphismes de V et supposons V complètement réductible relativement à $\mathcal{A}$. Alors les espaces $V^h = \{v \in V, av = 0 \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}\}$ et $V^0 = \{v \in V \text{ de la forme } v = \sum_i a_i v_i, a_i \in \mathcal{A}, v_i \in V\}$ sont stables par $\mathcal{A}$ et $V = V^h \oplus V^0$.

Démonstration. La stabilité de V^0 et de V^h est évidente. Soit W un supplémentaire de V^h dans V , stable par α , et $v = w + v^h \in V = W \oplus V^h$ un élément quelconque de V ; $av = aw + av^h = aw \in W$ ce qui montre que tous les éléments de la forme av sont dans W , d'où $W \supset V^0$. Soit alors T un supplémentaire de V^0 , stable par α et tel que $W = V^0 \oplus T$. Si $t \in T$, $at \in V^0$ et $at \in T$ donc $at = 0$ quelque soit $a \in \alpha$. On en déduit que $t \in V^h \cap W = \{0\}$. Ainsi $V^0 = W$ ce qui achève la démonstration.

Proposition (3.2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{Z}$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, et $[U, U]$ le sous-espace de $U(\mathfrak{g})$ engendré par les crochets $[v, u] = vu - uv$, $u, v \in U$. On a

$$U = \mathfrak{Z} \oplus [U, U].$$

Démonstration. Appliquons le lemme ci-dessus à la famille d'opérateurs $\text{ad}_U(\mathfrak{g})$. Dans ce cas

$U^h = \{x \in U, \text{ad}_U(g)x = gx - xg = 0 \text{ pour tout } g \in \mathfrak{g}\}$ est clairement le centre $\mathfrak{Z}$ de U , et $U^0 = [U, U]$. En effet $U^0 \subset [U, U]$; de plus, si $x = g_1 \cdots g_p$, $g_i \in \mathfrak{g}$, et $u \in U$ on a :

$$[x, u] = g_1 \cdots g_p u - u g_1 \cdots g_p = \sum_{i=1}^p [g_i, g_{i+1} \cdots g_p u g_1 \cdots g_{i-1}]$$

ce qui prouve que $U^0 \subset [U, U]$. La proposition est démontrée.

Remarque. Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. On dit que $v \in V$ est un vecteur invariant de π (ou du $\mathfrak{g}$ -module V associé à π) s'il est annulé par tous les opérateurs $\pi(g)$, $g \in \mathfrak{g}$.

D'après ce qui précède, $\mathfrak{Z}$ est l'espace des vecteurs invariants de ad_U . Comme $\eta: S \rightarrow U$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ -modules on a, si J est l'ensemble des vecteurs invariants de ad_S :

$$\eta(J) = \mathfrak{Z}.$$

4. La décomposition $U = U(\mathfrak{h}) + [U, U]$.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et Δ le système des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Lemme (4.1) Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme à n variables. On peut écrire $P = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \lambda(X_1, \dots, X_n)^{b_{\lambda}}$ $a_{\lambda} \in \mathbb{C}$, $b_{\lambda} \in \mathbb{N}$ où la sommation s'étend à un certain nombre de polynômes λ homogènes du premier degré.

Démonstration. On fait une récurrence sur le nombre n des variables. Pour $n = 1$, c'est trivial.

Démontrons le lemme pour $n = 2$. Considérons un monôme de la forme $X^p Y^q$ et posons $m = p+q$. Etant donné des scalaires $a_0, \dots, a_m$, on peut résoudre le système de $m+1$ équations

$$\begin{aligned} (X + a_0 Y)^m &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} X^{m-i} a_0^i Y^i \\ &\vdots \\ (X + a_m Y)^m &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} X^{m-i} a_m^i Y^i \end{aligned}$$

en fonction des inconnues $X^{m-i} Y^i$ si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{0} a_0^0 & \binom{m}{1} a_0^1 & \dots & \binom{m}{m} a_0^m \\ \binom{m}{0} a_1^0 & \binom{m}{1} a_1^1 & \dots & \binom{m}{m} a_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{m}{0} a_m^0 & \dots & \dots & \binom{m}{m} a_m^m \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^m \binom{m}{i} \prod_{i>j} (a_i - a_j)$$

est différent de 0, autrement dit, si les nombres $a_0, \dots, a_m$ sont tous distincts. Ceci prouve le lemme pour $n = 2$. Supposons enfin l'affirmation vraie pour $m < n$, et démontrons la pour $m = n$. Il suffit de le faire pour un monôme. On a :

$$X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n} = X_1^{p_1} \left(\sum_{\lambda} a_{\lambda} \lambda(X_2, \dots, X_n)^{b_{\lambda}} \right)$$

par hypothèse. En utilisant le calcul fait pour $n = 2$, on peut écrire

$$X_1^{p_1} [\lambda(X_2, \dots, X_n)]^{b_{\lambda}} = \sum_{i=0}^{p_1+b_{\lambda}} \alpha_i (X + a_i \lambda(X_2, \dots, X_n))^{p_1+b_{\lambda}}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme (4,2) Tout élément de $S(\mathfrak{h})$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de la forme H^m , où $H \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(H) \neq 0$ quelle que soit la racine $\alpha \in \Delta$.

Démonstration. Soit $H_1, \dots, H_l$ une base de $\mathfrak{h}$ formée de vecteurs qui ne sont pas dans les hyperplans $\ker(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$. Tout élément de $S(\mathfrak{h})$ s'écrit comme un polynôme $h = \sum_{p_1, \dots, p_l} a_{p_1, \dots, p_l} H_1^{p_1} \dots H_l^{p_l}$, il suffit donc de vérifier le lemme pour un monôme. Pour cela on revient à la dernière étape du raisonnement précédent. On a

$$H_1^{p_1} \dots H_l^{p_l} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \lambda(H_1, \dots, H_l)^{b_{\lambda}},$$

$\lambda(H_1, \dots, H_l) \in \mathfrak{h}$, et on sait qu'il existe des nombres complexes $a_0, \dots, a_{p_1+b_{\lambda}}$ tels que $h' = H_1^{p_1} [\lambda(H_1, \dots, H_l)]^{b_{\lambda}}$ est combinaison linéaire de puissances d'éléments de la forme $H_1 + a_1 \lambda(H_1, \dots, H_l)$, de plus, il est clair qu'on peut faire varier chaque a_1 indépendamment dans un petit disque, sans changer le fait que h' puisse s'écrire comme une telle combinaison linéaire. Or la droite dans $\mathfrak{h}$

$$t \longmapsto H_1 + t a_1 \lambda(H_1, \dots, H_l) \quad t \in \mathbb{C}$$

ne peut être entièrement contenue dans l'un des $\ker(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, sans que H_1 le soit aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur la base; cette droite coupe donc chacun des $\ker(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, en un seul point, et comme ces hyperplans sont en nombre fini, ces points sont isolés sur la droite. Ainsi, en remplaçant au besoin a_1 par un nombre très voisin on voit qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} h' &= H_1^{p_1} [\lambda(H_1, \dots, H_l)]^{b_{\lambda}} \\ &= \sum_{i=0}^{p_1+b_{\lambda}} \alpha_i [H_1 + a_1 \lambda(H_1, \dots, H_l)]^{p_1+b_{\lambda}} \end{aligned}$$

avec $H_1 + a_1 \lambda(H_1, \dots, H_l) \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} \ker(\alpha)$. C.Q.F.D.

Proposition (4.3) Le plus petit sous-espace invariant pour ad_U contenant $U(\mathfrak{h})$ est $U(\mathfrak{g})$ tout entier.

Démonstration. On démontre la proposition équivalente pour ad_S et $S(\mathfrak{g})$ puisque l'isomorphisme de U -module $\eta : S \longrightarrow U$ identifie $S(\mathfrak{h})$ à $U(\mathfrak{h})$ (voir le N° 1).

Soit T le plus petit sous-espace invariant de ad_S contenant $S(\mathfrak{h})$. Pour $H \in \mathfrak{h}$, $H \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} \ker(\alpha)$ et $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha^\alpha$, on a, en utilisant la commutativité dans l'algèbre $S(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned} \text{ad}_S(X_\alpha) H^n &= \sum_{i=1}^n H \cdots [X_\alpha, H] \cdots H \\ &= -n\alpha(H) X_\alpha H^{n-1} \in T. \end{aligned}$$

Supposons alors que tous les éléments de la forme $X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_{p-1}} H^n$ sont dans T . Puisque $[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_i}] = N_{\alpha_1 + \alpha_i} \cdot X_{\alpha_1 + \alpha_i}$ l'égalité

$$\begin{aligned} \text{ad}_S(X_{\alpha_1}) X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_p} H^n &= \\ \sum_{i=2}^p X_{\alpha_2} \cdots [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_i}] \cdots X_{\alpha_p} H^n &= -\alpha_1(H) X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_p} H^{n-1} \end{aligned}$$

montre que tous les éléments de la forme

$$X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_p} H^n$$

sont dans T . Ainsi, par récurrence et en utilisant le lemme ci-dessus, on voit que T contient une base de $S(\mathfrak{g})$. Par conséquent $T = S(\mathfrak{g})$ et la proposition est démontrée.

Corollaire (4.4) On a $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) + [U, U]$, où $[U, U]$ est le sous-espace vectoriel de U engendré par les crochets $[u, v] = uv - vu$, $u, v \in U$.

Démonstration. Tout élément de $U(\mathfrak{g})$ est de la forme $\text{ad}_U(u)h$, $u \in U(\mathfrak{g})$, $h \in U(\mathfrak{h})$, donc de la forme $h + \sum_i [g_i, u_i]$ où $h \in U(\mathfrak{h})$, $g_i \in \mathfrak{g}$, $u_i \in U$.

C.Q.F.D.

Remarque. Nous verrons, lorsqu'il sera question des caractères de $U(\mathfrak{g})$, que cette décomposition remplace le théorème de conjugaison pour les groupes de Lie compacts.

5. La décomposition $U = \bigoplus U^{\beta}$, L'algèbre U^0 .

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ le système des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Etant donné un ordre sur Δ , on note $\Delta^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ les racines positives, $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ les racines simples de Δ^+ ,

$\underline{n}^+ = \sum_{\beta \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{\beta}$ et $\underline{n}^- = \sum_{\beta \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\beta}$ d'où la décomposition

$$\mathfrak{g} = \underline{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \underline{n}^+$$

Choisissons encore une base de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Pour cela, on rappelle que l'on note H_{α} l'unique élément du sous-espace

$\mathfrak{h}_{\alpha} = [\mathfrak{g}_{\alpha}^+, \mathfrak{g}_{\alpha}^-]$, $\alpha \in \Delta$ tel que $\alpha(H_{\alpha}) = 2$ et que, pour $X_{\beta} \in \mathfrak{g}^{\beta}$, $\beta \in \Delta^+$, on note Y_{β} l'élément de $\mathfrak{g}^{-\beta}$ tel que $[X_{\beta}, Y_{\beta}] = H_{\beta}$.

On pose encore $H_i = H_{\alpha_i}$, $X_i = X_{\alpha_i}$, $Y_i = Y_{\alpha_i}$ pour $\alpha_i \in \Sigma$ (on sait que $\alpha_j(H_i)$ est entier : matrice de Cartan).

On considère alors la base suivante de $\mathfrak{g}$, dite base de Cartan :

$$B = \{Y_{\beta_1}, Y_{\beta_2}, \dots, Y_{\beta_n}, H_1, \dots, H_l, X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_n}\};$$

on a donc :

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 & 0 \leq i, j \leq l \\ [H, X_{\beta}] &= \beta(H) X_{\beta} & \beta \in \Delta^+ \\ [H, Y_{\beta}] &= -\beta(H) Y_{\beta} & \beta \in \Delta^+ \\ [X_{\beta}, Y_{\beta}] &= H_{\beta} & \beta \in \Delta^+ & ([X_i, Y_i] = H_i \quad i = 1, \dots, l) \\ [X_{\gamma}, X_{\delta}] &= N_{\gamma, \delta} X_{\gamma + \delta} & N_{\gamma, \delta} \neq 0 & \text{pour } \gamma, \delta \in \Delta, \gamma + \delta \in \Delta \\ &= 0 & & \text{pour } \gamma, \delta \in \Delta, \gamma + \delta \notin \Delta \cup \{0\} \end{aligned}$$

Soit U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Les éléments $Y_{\beta_1}^{p_1} Y_{\beta_2}^{p_2} \dots Y_{\beta_n}^{p_n} \cdot H_1^{q_1} \dots H_l^{q_l} \cdot X_{\beta_1}^{r_1} \dots X_{\beta_n}^{r_n}$

$p_i, q_j, r_k \in \mathbb{N}$ forment donc une base de U . Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on la note souvent symboliquement comme suit :

$$\{Y^P H^Q X^R \quad p, q, r \geq 0.\}$$

Proposition (5.1) Soit $U \underline{n}^+ = \sum_{\beta \in \Delta^+} U X_\beta$ (idéal à gauche) et $\underline{n}^- U = \sum_{\beta \in \Delta^-} Y_\beta U$ (idéal à droite). On a la décomposition :

$$U = U(\underline{h}) \oplus (\underline{n}^- U + U \underline{n}^+).$$

Démonstration. Avec la base ci-dessus, on voit qu'on peut écrire tous les éléments de U de façon unique sous la forme

$$\sum a_q H^q + \sum_{p,q,r} a_{p,q,r} Y^p H^q X^r$$

où, dans la deuxième somme p , ou (et) r est $\neq 0$, ce qui prouve l'affirmation.

Etant donné $\xi \in \underline{h}^*$, soit

$$U^\xi = \{ u \in U, \text{ad}_U(H) u = \xi(H) u \text{ pour tout } H \in \underline{h} \}.$$

On dit que ξ est un rang si $U^\xi \neq \{0\}$, que U^ξ est l'espace des vecteurs de rang ξ , et on note Γ l'ensemble des rangs.

Lemme (5.2) Soit $x \in U^\xi$ un élément de rang ξ et $y \in U^\zeta$ un élément de rang ζ . Alors xy est de rang $\xi + \zeta$.

Démonstration. Ceci résulte du calcul

$$\begin{aligned} \text{ad}_U(H)xy &= Hxy - xHy + xHy - xyH \\ &= (\text{ad}_U(H)x)y + x(\text{ad}_U(H)y) = (\xi + \zeta)(H)xy. \end{aligned}$$

Corollaire. L'élément de base $Y_{\beta_1}^{p_1} \dots Y_{\beta_n}^{p_n} H_1^{q_1} \dots H_l^{q_l} X_{\beta_1}^{r_1} \dots X_{\beta_n}^{r_n}$

est de rang $\sum_{j=1}^n (r_j - p_j) \beta_j$ et ceci reste vrai quel que soit l'ordre des lettres du produit.

La démonstration est claire par récurrence, puisque X_β est de rang β et Y_β de rang $-\beta$.

Proposition (5.3) L'ensemble des rangs est le réseau

$$\Gamma = \{ \xi \in \underline{h}^*, \xi = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{Z} \} \text{ engendré par les}$$

racines simples, on a

$$U = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi.$$

Pour $\xi \in \Gamma$, les éléments $Y_{\beta_1}^{r_1} \dots Y_{\beta_n}^{r_n} H_1^{q_1} \dots H_l^{q_l} X_{\beta_1}^{r_1} \dots X_{\beta_n}^{r_n}$ vérifiant $\sum_{j=1}^n (r_j - p_j) \beta_j = \xi$ forment une base de U^ξ . Ceci reste vrai si on permute de façon quelconque les lettres des produits ci-dessus.

Démonstration. Soient ξ et ξ' deux rangs distincts, et $H \in \mathfrak{h}$ tel que $\xi(H) \neq \xi'(H)$; U^ξ (resp. $U^{\xi'}$) est contenu dans le sous-espace propre de $\text{ad}_U(H)$ associé à la valeur propre $\xi(H)$ (resp. $\xi'(H)$), d'où $U^\xi \cap U^{\xi'} = \{0\}$. La somme $\bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi$ est donc directe.

Soit alors $\xi = \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, Γ' le réseau de $\mathfrak{h}^*$ engendré

par les racines simples et notons U^{ξ} le sous-espace vectoriel de U dont une base est formée des éléments $Y^p H^q X^r$ tels que $\sum_{j=1}^n (r_j - p_j) \beta_j = \xi$.

Non seulement $U^{\xi} \neq \{0\}$, mais encore $U = \bigoplus_{\xi \in \Gamma'} U^{\xi}$ puisque les éléments ci-dessus forment une base de U lorsque ξ parcourt Γ' . Il résulte du corollaire ci-dessus que $U^{\xi} \subset U^\xi$ pour les $\xi \in \Gamma'$ et la démonstration est alors achevée [voir aussi le corollaire (1.4') de P.B.W. (N° 1)].

Le lemme (5.2) ci-dessus montre que pour $\xi, \zeta \in \Gamma$ on a $U^\xi U^\zeta \subset U^{\xi+\zeta}$.

Le sous-espace U^0 des vecteurs de rang 0 est donc une sous-algèbre de U . De plus, on peut considérer U^ξ comme un U^0 -module à gauche (mult. à gauche par U^0) et comme un U^0 -module à droite (mult. à droite).

Il est clair que si on note de même pour l'algèbre symétrique S

$$S^\xi = \{ a \in S, \text{ ad}_S(H) a = \xi(H) a \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h} \}$$

$$\text{on a } S = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} S^\xi \text{ et } \eta(S^\xi) = U^\xi.$$

Proposition (5.4). Avec les notations ci-dessus :

- (i) U^0 est le centralisateur de $U(\mathfrak{h})$ dans U . En particulier U^0 contient le centre $\mathfrak{Z}$ de U .
- (ii) On a $U_{\mathfrak{h}}^+ \cap U^0 = \mathfrak{h}^- U \cap U^0$ et
 $U^0 = U(\mathfrak{h}) \oplus (U_{\mathfrak{h}}^+ \cap U^0) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{h}^- U \cap U^0)$
- (iii) $U^0 = \mathfrak{Z} \oplus ([U, U] \cap U^0)$
- (iv) $U^0 = U(\mathfrak{h}) + ([U, U] \cap U^0)$

Démonstration.

- (i) U^0 est l'espace des éléments $u \in U$ tels que $\text{ad}_U(H)u = Hu - uH = 0$ pour tous les $H \in \mathfrak{h}$, c'est donc aussi le centralisateur de $U(\mathfrak{h})$ dans U .
- (ii) Si un élément de base $Y^p H^q X^r$ est dans U^0 , on a $p \neq 0$ si et seulement si $r \neq 0$. La démonstration est alors la même que celle de la proposition (5.1).
- (iii) Puisque $\mathfrak{Z} \subset U^0$ on a $U^0 \supset \mathfrak{Z} \oplus ([U, U] \cap U^0)$.
 Inversément, soit $u \in U^0$ et $u = z + u'$ sa décomposition dans $U = \mathfrak{Z} \oplus [U, U]$ ($N^0 \mathfrak{Z}$). Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}_U(H)u = \text{ad}_U(H)z = 0$ donc $\text{ad}_U(H)u' = 0$; d'où $u' \in ([U, U] \cap U^0)$.
- (iv) Résulte d'un calcul analogue.

Proposition (5.5). L'algèbre U^0 a un nombre fini de générateurs et les sous-espaces U^{ξ} , $\xi \in \Gamma$ sont des U^0 -modules de type fini.

Puisque $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, ceci est un cas particulier du théorème dit des invariants de Hilbert (Séminaire N. Lie [10] p. 7 - 08).

La démonstration directe qui suit est due à G.E. Burger (voir I.Z. Bouwer [2] p. 347).

Notons $F = \{ Y^p H^q X^r ; p, q, r \geq 0 \}$ la base de U associée à la base de Cartan B de $\mathfrak{g}$. Soient u et $u' \in F$, $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_l, r_1, \dots, r_n)$ le $2n+l$ -uple formé des exposants de u et $(p'_1, \dots, p'_n, q'_1, \dots, q'_l, r'_1, \dots, r'_n)$ celui de u' .

On dit que u contient u' si $p'_i \leq p_i$, $q'_j \leq q_j$, $r'_k \leq r_k$ pour $1 \leq i, k \leq n$, $1 \leq j \leq l$, et que u contient u' strictement, si u contient u' et si $u \neq u'$.

On appelle cycles de F les éléments de F de rang 0 (i.e. les éléments de la base $F \cap U^0$ de U^0) et éléments minimaux de F , ceux qui ne contiennent pas strictement de cycles $\neq 1$.

Lemme (5.6). Les éléments minimaux de F de rang ξ sont en nombre fini.

Démonstration. Soit W une partie quelconque de B et $E(W)$ l'ensemble des éléments minimaux de F de rang ξ qui sont des produits de puissances non nulles de lettres de W . Puisque tout élément minimal de F et de rang ξ est contenu dans l'un des $E(W)$ lorsque W parcourt $\mathcal{P}(B)$, l'ensemble des parties de B , le lemme est démontré si l'on prouve $\text{Card}(E(W)) < \infty$.

Supposons $\text{Card}(E(W)) > 0$. On veut construire par récurrence une suite d'entiers $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r \leq \infty$, $r = \text{Card}(W)$, telle que tout élément de $E(W)$ a au moins t exposants $\leq a_t$ pour $t = 1, \dots, r$. Soit $x \in E(W)$ et a_1 l'exposant maximum de x . Les éléments de $E(W)$ ont tous un exposant $\leq a_1$ au moins. Sinon, s'il existait un élément y de $E(W)$ dont tous les exposants étaient $> a_1$, cet élément y contiendrait strictement x donc un cycle de $F \neq 1$; ceci contredirait la minimalité de y .

Supposons maintenant (hypothèse de récurrence) l'existence d'un entier a_{k-1} tel que tout élément de $E(W)$ a $k-1$ exposants au moins inférieurs ou égaux à a_{k-1} . On construit a_k comme suit. Considérons W comme une suite, ordonnée par l'ordre de B , de r lettres : $x_1, \dots, x_r$ et notons $W^{(k-1)}$ l'ensemble des sous-suites composées de

$k-1$ lettres de W , notées $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}$, et $\tilde{W}^{(k-1)}$ l'ensemble des suites de $k-1$ entiers $(h_1, \dots, h_{k-1})$, tels que $0 < h_i \leq a_{k-1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$. L'ensemble produit $W^{(k-1)} \times \tilde{W}^{(k-1)}$ est fini. A toute paire $(x, h) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}; h_1, \dots, h_{k-1})$ de $W^{(k-1)} \times \tilde{W}^{(k-1)}$ on associe l'ensemble

$$G(x, h) = \left\{ \begin{array}{l} \text{éléments de } E(W) \text{ dans lesquels les lettres } x_{i_j} \\ \text{apparaissent toutes à la puissance } h_j \text{ exactement} \\ \text{pour } j = 1, \dots, k-1 \end{array} \right\}.$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que tout élément de $E(W)$ est contenu dans l'un des $G(x, h)$ au moins. Enfin, on choisit un élément $z(x, h)$ quelconque dans chacun des $G(x, h) \neq \emptyset$ et on pose :

$$a'_k = \max_{G(x, h) \neq \emptyset} (\text{plus grand exposant de } z(x, h))$$

et

$$a_k = \max (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a'_k)$$

Pour voir que a_k vérifie l'hypothèse de récurrence, supposons l'existence d'un $y = x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} \in E(W)$ qui n'ait que $k-1$ exposants $\leq a_k$. Puisque y appartient nécessairement à l'un des $G(x, h)$, y contient donc strictement l'un des $z(x, h)$, car ceux-ci ont par construction tous leurs exposants $\leq a_k$. Par conséquent y contient un cycle de $F \neq 1$, ce qui contredit le fait que y est minimal.

Il résulte de ce qui précède que les éléments de $E(W)$ ont tous leurs exposants $\leq a_r$ et par conséquent que $E(W)$ contient au plus $(a_r)^r$ éléments. C.Q.F.D.

Lemme (5.7). Soit $u \in F$. On peut permuter les lettres de u de manière à obtenir un élément de la forme $c_1 \dots c_m \cdot u'$, où u' est un élément minimal de F de même rang que u , et $c_1, \dots, c_m$ sont des cycles minimaux de F .

Démonstration. Elle est claire en faisant un nombre fini de fois le raisonnement : ou bien $v \in F$ est minimal, ou bien, en permutant les lettres de v on obtient un élément de la forme $c \cdot v'$ où c est un cycle de F et v' un élément de F de rang ξ .

La démonstration de la proposition (5.5) résulte alors clairement des lemmes (5.6) et (5.7) et de la proposition (5.3).

Proposition (5.5). Le groupe de Weyl W de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ opère canoniquement dans U .

Démonstration. Soit $\text{Int}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$ et considérons W comme l'ensemble $\{ \phi/\mathfrak{h}, \phi \in \text{Int}(\mathfrak{g}) \text{ et } \phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \}$ (voir chap. I, N° 3).

Soit $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ un automorphisme de $\mathfrak{g}$; ϕ se prolonge canoniquement en un automorphisme de U selon le diagramme (relèvement universel)



et l'application $\phi \longmapsto \tilde{\phi}$ est une représentation de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. De plus, on vérifie facilement que si $\phi \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ est de la forme $\phi = e^{\text{ad}(x)}$ $x \in \mathfrak{g}$, alors $\tilde{\phi} = e^{\text{ad}_U(x)}$ (l'opérateur $e^{\text{ad}_U(x)}$ est bien défini dans l'espace U_p , qui est de dimension finie et stable par $\text{ad}_U(x)$ (N° 2) et par conséquent dans U). Si $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui stabilise $\mathfrak{h}$, alors $\tilde{\phi}$ stabilise le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans U , c'est-à-dire U^0 . En effet, pour $H \in \mathfrak{h}$ et $c \in U$, on a :

$\tilde{\Phi}(c) H = \tilde{\Phi}(c) \phi(H') = \tilde{\Phi}(cH') = \tilde{\Phi}(H'c) = H \tilde{\Phi}(c)$. Or, on sait (chap. I, N° 3) que si ϕ et $\psi \in \text{Int}(\mathfrak{g})$ stabilisent $\mathfrak{h}$ et coïncident sur $\mathfrak{h}$, alors $\phi = e^{\text{ad}(H)}\psi$ pour un certain $H \in \mathfrak{h}$; comme $\phi \longmapsto \tilde{\Phi}$ est une représentation on a déduit $\tilde{\Phi} = e^{\text{ad}_U(H)}\psi$, et puisque $e^{\text{ad}_U(H)}|_{U^\circ} = \text{Id}_{U^\circ}$ on a $\tilde{\Phi}|_{U^\circ} = \psi|_{U^\circ}$. Ceci achève la démonstration.

III. Représentations $\mathbb{C}$ -diagonales.

1. Existence d'un caractère infinitésimal.

Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$, unifiée et associative, $\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$ son centre, et $\pi: \mathfrak{A} \longrightarrow \text{End}(V)$ une représentation de $\mathfrak{A}$. On supposera toujours que $\pi(1) = \text{Id}_V$.

Définition. On dit que π possède un caractère infinitésimal si les opérateurs $\pi(z)$, $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{A})$ sont tous scalaires.

La fonction $\chi_\pi: \mathcal{Z}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\pi(z) = \chi_\pi(z) \text{Id}_V \quad \text{pour } z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{A})$$

est un caractère de l'algèbre commutative $\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$. C'est le caractère infinitésimal de π . Le résultat suivant est dû à Dixmier (Voir aussi D. Quillen [9]).

Théorème (1.1). Si A est une algèbre d'opérateurs qui opère irréductiblement dans un espace vectoriel V de dimension dénombrable, alors le commutant A' de A est réduit aux scalaires.

Démonstration. A' est une algèbre de division qui contient $\mathbb{C}$ (Schur), donc A' est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et V un espace vectoriel (à droite) sur A' , d'où la formule

$$\dim_{\mathbb{C}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(A') \dim_{A'}(V),$$

qui prouve que, dans les conditions du théorème, $\dim_{\mathbb{C}}(A')$ est au plus dénombrable.

Si A' contient un opérateur non scalaire, A' contient donc un corps isomorphe à une extension transcendente $\mathbb{C}(x)$ de $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}(x)$ les éléments $\frac{1}{x-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ sont linéairement indépendants. Supposons en effet que pour des $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n-1$, tous distincts, la famille $\frac{1}{x-\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n-1$ est linéairement dépendante, autrement dit que l'équation :

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (x - \lambda_i) = 0$$

implique $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$, et considérons l'équation

$$(I) \quad \sum_{j=1}^n a_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - \lambda_i) = 0$$

pour des $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, tous distincts. L'égalité (I) implique

$$\sum_{j=1}^n a_j = 0, \text{ donc } a_n = - \sum_{j=1}^{n-1} a_j, \text{ et par conséquent}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - \lambda_i) &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (x - \lambda_i) - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n (x - \lambda_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j (\lambda_j - \lambda_n) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} (x - \lambda_i) = 0, \end{aligned}$$

d'où $a_j(\lambda_j - \lambda_n) = 0$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Il s'en suit que

$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ et que la famille $\frac{1}{x - \lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$ est

linéairement indépendante si les λ_i sont tous distincts. Il résulte de là que $\mathbb{C}(x)$, donc A' , est à base non dénombrable, ce qui est absurde. Ainsi $A' = \mathbb{C} \cdot \text{Id}_V$ et le théorème est démontré.

Corollaire (1.2). Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ unifiée, associative, et supposons que $\mathcal{A}$ est à base dénombrable sur $\mathbb{C}$.

Si $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V)$ est une représentation irréductible de $\mathcal{A}$, alors π admet un caractère infinitésimal.

Démonstration. L'espace V de π est de dimension au plus dénombrable, car, si M est l'annulateur d'un élément de V , la représentation (π, V) est équivalente à la représentation π/M . Les opérateurs $\pi(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ sont dans le commutant de $\pi(\mathcal{A})$ et sont donc scalaires. C.Q.F.D.

Ce résultat s'applique en particulier aux algèbres U et U^0 (chap. II, N° 5) qui sont à base dénombrable (P.B.W.). Le corollaire suivant est utile lorsqu'il s'agit d'algèbres de polynômes sur $\mathbb{C}$ (commutatifs!) comme, par exemple, l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$.

Corollaire (1.3). Soit α une algèbre commutative vérifiant les hypothèses du corollaire (1.2).

Toutes les représentations irréductibles de α sont de dimension 1, ou, ce qui revient au même, tous les idéaux maximaux de α sont de codimension 1.

Démonstration. Une représentation irréductible $\pi: \alpha \rightarrow \text{End}(V)$ est nécessairement scalaire (Théorème (1.1) et ceci n'est possible que si $\dim(V) = 1$, d'où le corollaire.

Les représentations de dimension 1 de α (commutative et unifère) sont appelées les caractères de α .

2. Poids et représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Δ le système des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha \right)$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ qui lui est associée.

Etant donné une représentation $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ et une forme $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note :

$$V^\lambda = \{ v \in V, \pi(H)v = \lambda(H)v \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h} \}.$$

On dit que λ est un poids de (π, V) si $\dim(V^\lambda) > 0$, et que V^λ est l'espace des vecteurs de poids λ . On note P_π (ou P_V) l'ensemble des poids de (π, V) . Si $\lambda \in P_\pi$, la dimension de V^λ est appelée la multiplicité du poids λ .

Proposition (2.1) Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. On a :

- $\pi(\mathfrak{g}^\alpha) V^\lambda \subset V^{\lambda+\alpha}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in \Delta$. Plus généralement, si $u \in U^{\xi}$ est un vecteur de rang ξ (c.f. II N° 5) $\pi(u) V^\lambda \subset V^{\lambda+\xi}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
- La somme $V' = \sum_{\lambda \in P_\pi} V^\lambda$ est directe, et stable par π .

Démonstration. a) Soit $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $v \in V$. On a : $\pi(H)\pi(X)v = \pi(HX)v = \pi([H, X] + XH)v = (\alpha + \lambda)(H)v$.

Plus généralement, pour $u \in U^{\xi}$,

$$\pi(H) \pi(u) v = \pi(Hu) v = \pi(uH + \text{ad}_U(H) u) v = (\lambda + \xi)(H) v.$$

b) Si λ et λ' sont deux poids distincts, et $H \in \mathfrak{h}$ tel que $\lambda(H) \neq \lambda'(H)$, alors $V^{\lambda} \subset \ker(\pi(H) - \lambda(H))$ et $V^{\lambda'} \subset \ker(\pi(H) - \lambda'(H))$, donc $V^{\lambda} \cap V^{\lambda'} = \{0\}$. La stabilité est claire à partir de a) et de la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\pm})$.

Définition. On dit qu'une représentation (π, V) de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{h}$ -diagonale si $V = \bigoplus_{\lambda \in P_{\pi}} V^{\lambda}$, ou, ce qui revient au même, si $\pi(H)$ est diagonalisable pour tout $H \in \mathfrak{h}$. (En effet, si A et B commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables (il existe une base formée de vecteurs propres communs) : soit $V^{\alpha} = \{v \in V, Av = \alpha v\}$, $V = \bigoplus V^{\alpha}$ (resp. $V = \bigoplus W^{\beta}$) la décomposition de V en sous-espaces propres de A (resp. de B) ; $AB = BA$ implique W^{β} stable par A. Ecrivons $v = v_1 + \dots + v_n$ la décomposition de $v \in W^{\beta}$ dans $V = \bigoplus V^{\alpha}$; on montre alors comme en (2.5) que $v_1, \dots, v_n \in W^{\beta}$, d'où $W^{\beta} = \bigoplus W^{\beta} \cap V^{\alpha}$. $\mathfrak{h}$ étant de dimension finie, si $\pi(H)$ est diagonalisable pour tout $H \in \mathfrak{h}$, les images par π d'une base de $\mathfrak{h}$ sont des opérateurs simultanément diagonalisables).

Exemple. Les représentations ad et ad_U sont $\mathfrak{h}$ -diagonales. L'ensemble des poids de ad est $\Delta \cup \{0\}$, et $\Gamma = \{\xi - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{Z}\}$ est celui de ad_U .

Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. Un vecteur $v \in V$ est dit totalisateur, si v engendre le $\mathfrak{g}$ -module V, autrement dit si $\pi(U)v = V$; la représentation est dite cyclique si elle admet un vecteur totalisateur et P-cyclique si elle admet un vecteur totalisateur qui est dans l'un des sous-espaces de poids. Une représentation est irréductible si et seulement si tout vecteur $\neq 0$ est totalisateur.

Proposition (2.2). Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$ qui admet un vecteur totalisateur de poids λ .

Alors (π, V) est $\mathfrak{h}$ -diagonale, et P_{π} est un sous-ensemble de $\Gamma + \lambda = \{\mu = \lambda + \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration. Soit $v \neq 0$ un vecteur totalisateur de poids λ .

Puisque $\pi(U^{\xi})v \subset V^{\lambda+\xi}$ (proposition (2.1)), il résulte de $V = \pi(U)v = \sum_{\xi \in \Gamma} \pi(U^{\xi})v$ que $\pi(U^{\xi})v = V^{\lambda+\xi}$ pour tout $\xi \in \Gamma$, d'où la proposition.

Corollaire (2.3). Si une représentation irréductible (π, V) de $\mathfrak{g}$ possède un poids λ , elle est alors $\mathfrak{h}$ -diagonale et ses poids sont de la forme $\lambda + \xi$, $\xi \in \Gamma$.

Démonstration. Ceci découle de ce que la représentation étant irréductible, tout vecteur est totalisateur. On peut donc appliquer la proposition.

Une des conséquences de ce corollaire est le critère suivant
(LEMIRE [8] Canad. Math. Bull. Vol. 14 (1) 1971).

Proposition (2.4). Soit (π, V) une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- a) (π, V) est $\mathfrak{h}$ -diagonale.
- b) Pour tout $v \in V$, l'espace $\pi(U(\mathfrak{h})) v$ est de dimension finie.
- c) Il existe $v \neq 0$ tel que l'espace $\pi(U(\mathfrak{h})) v$ est de dimension finie.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b). Soit $v = \sum_{\lambda} v^{\lambda}$ la décomposition d'un vecteur v quelconque dans $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}_{\pi}} V^{\lambda}$. On a $\pi(H) v = \sum_{\lambda} \pi(H) v^{\lambda} = \sum_{\lambda} \lambda(H) v^{\lambda}$, d'où l'on tire que l'espace $\pi(U(\mathfrak{h})) v$ est au plus de dimension égale au nombre de composantes non nulles dans la somme $v = \sum_{\lambda} v^{\lambda}$.

b) $\Rightarrow$ c) est trivial

c) $\Rightarrow$ a) Une représentation $\tilde{\pi}$ de dimension finie d'une algèbre commutative A ne peut être irréductible qu'en dimension 1. (Ceci résulte du corollaire 2 n° 1, mais se démontre aussi directement (Schur) : soit $a \in A$, et $\alpha \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\tilde{\pi}(a)$. $\text{Ker} (\tilde{\pi}(a) - \alpha I)$ est un sous-espace non nul, stable par $\tilde{\pi}(A)$, donc $\tilde{\pi}(a)$ est scalaire.)

Soit $\tilde{\pi}$ la représentation de $U(\mathfrak{h})$ dans l'espace de dimension finie $\tilde{V} = \pi(U(\mathfrak{h})) v$. Ou bien $\tilde{V}$ est irréductible, auquel cas il est de dimension 1, ou bien $\tilde{V}$ contient un sous-espace stable de dimension strictement inférieur. En répétant ce raisonnement, on montre l'existence d'un sous-espace stable de dimension 1 dans V , autrement dit l'existence d'un vecteur propre simultané pour les opérateurs $\pi(H)$, $H \in \mathfrak{h}$. La représentation (π, V) possède donc un poids. Le corollaire (2.3) permet donc de conclure. C.Q.F.D.

N.B. Dans l'énoncé de la proposition (2.4) , on peut remplacer la condition b) par la condition

b') Pour tout $v \in V$ et pour tout $H \in \mathcal{H}$, l'espace $\pi(\mathbb{C}[H]) v$ est de dimension finie ;

et la condition c) par la condition

c') Il existe $v \neq 0$ tel que pour tout H , l'espace $\pi(\mathbb{C}[H]) v$ est de dimension finie.

(On note $\mathbb{C}[H]$ l'algèbre des polynômes complexes en H) .

Il est clair que $b) \Rightarrow b')$ et $c) \Rightarrow c')$.

Inversément, soit $v \in V$ un vecteur tel que pour tout H l'espace $\pi(\mathbb{C}[H]) v$ est de dimension finie , et soit $H_1, \dots, H_t$ une base de $\mathcal{H}$. Pour $i = 1, \dots, t$, l'espace $V_i = \pi(\mathbb{C}[H_i]) v$ est stable par $\pi(\mathbb{C}[H_i])$; il est de dimension finie par hypothèse , ce qui implique que si $\dim(V_i) = n_i + 1$, les vecteurs $\pi(I) v = v$, $\pi(H_i) v$, $\pi(H_i^2) v$, ..., $\pi(H_i^{n_i}) v$ forment une base de V_i . Ainsi pour tout entier p_i ,

$$\pi(H_i^{p_i}) v = \sum_{j=0}^{n_i} \alpha_{j_i}^{p_i} \pi(H_i^j) v$$

Il résulte alors de la commutativité dans $U(\mathcal{H})$ que si $h \in U(\mathcal{H})$, $h = \sum_{p_1, \dots, p_t} a_{p_1, \dots, p_t} H_1^{p_1} \dots H_t^{p_t}$, on a

$$\begin{aligned} \pi(h) v &= \sum_{p_1, \dots, p_t} a_{p_1, \dots, p_t} \pi(H_1^{p_1}) \dots \pi(H_t^{p_t}) v \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_t} a_{p_1, \dots, p_t} \left(\sum_{j_1=0}^{n_1} \alpha_{j_1}^{p_1} \pi(H_1^{j_1}) \right) \dots \left(\sum_{j_t=0}^{n_t} \alpha_{j_t}^{p_t} \pi(H_t^{j_t}) \right) v \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_t=0}^{n_t} \left(\sum_{p_1, \dots, p_t} a_{p_1, \dots, p_t} \alpha_{j_1}^{p_1} \dots \alpha_{j_t}^{p_t} \right) \pi(H_1^{j_1}) \dots \pi(H_t^{j_t}) v \end{aligned}$$

de sorte que : $\dim (\pi(U(\mathcal{H})) v) \leq \prod_{i=1}^t n_i$

d'où $b') \Rightarrow b)$ et $c') \Rightarrow c)$.

Proposition (2.5). Toute sous-représentation, tout quotient d'une représentation $\mathfrak{h}$ - diagonale est aussi $\mathfrak{h}$ - diagonal.

Démonstration. Soit (π, V) , $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{P}_T} V^\lambda$ une représentation $\mathfrak{h}$ - diagonale de $\mathfrak{g}$, et W un sous-espace invariant de V . On a $W \subset \bigoplus_{\lambda} (V^\lambda \cap W)$. Inversément, soit $v \in W$ et $v = v^{\lambda_0} + \dots + v^{\lambda_n}$ sa décomposition dans $V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda$. Soit H tel que $\lambda_n(H) \neq \lambda_0(H)$. On a $\pi(H)v = \lambda_n(H)v \in W$ et $\pi(H)v - \lambda_n(H)v = (\lambda_0(H) - \lambda_n(H))v^{\lambda_0} + \dots + (\lambda_{n-1}(H) - \lambda_n(H))v^{\lambda_{n-1}} + 0 \cdot v^{\lambda_n}$. La somme n'a plus que n termes. En un nombre fini d'étapes analogues, on obtient $v^{\lambda_0} \in W$, et de même $v^{\lambda_1}, \dots, v^{\lambda_n} \in W$. Par conséquent

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{P}_T} V^\lambda \cap W.$$

Soit alors $\tilde{\pi}$ la représentation quotient de V par W . Si on note $v = \sum_{\lambda} v^{\lambda}$ un élément de $V = \bigoplus_{\lambda} V^\lambda$ l'application

$$v \pmod{W} \longmapsto \sum_{\lambda} (v^{\lambda} \pmod{W \cap V^{\lambda}})$$

établit un isomorphisme linéaire de V/W sur $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{P}_T} V^\lambda / (V^\lambda \cap W)$, et $V^\lambda / (V^\lambda \cap W)$ est clairement le sous-espace de poids λ de $\tilde{\pi}$.

Ceci prouve la proposition.

Proposition (2.6). Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{h}$ - diagonale.

Démonstration. L'algèbre $\mathfrak{h}$ est abélienne et formée d'éléments semi-simples, et l'on sait que, dans une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, l'image d'un élément semi-simple est diagonalisable (voir Serre [11] Lie algebras and Lie groups). Les opérateurs $\pi(H)$, $H \in \mathfrak{h}$ sont donc simultanément diagonalisables. C.Q.F.D.

Nous en venons maintenant aux relations qui existent entre les représentations $\mathfrak{h}$ - diagonales de $U(\mathfrak{g})$ et les représentations de U^0 en démontrant qu'une représentation $\mathfrak{h}$ - diagonale de $U(\mathfrak{g})$ fournit une famille de représentations de U^0 .

Proposition (2.7). Si (π, V) est une représentation $\mathfrak{h}$ - diagonale de U , les sous-espaces V^λ , $\lambda \in P_\pi$ sont stables par le centralisateur U^0 de $U(\mathfrak{h})$ dans U ; si (π, V) est en outre irréductible, les représentations $(\pi|_{U^0}, V^\lambda)$, $\lambda \in P_\pi$ sont aussi irréductibles.

Démonstration. Soit $v \in V^\lambda$ et $u \in U^0$. On a

$$\pi(H) \pi(u) v = \pi(u) \pi(H) v = \lambda(H) \pi(u) v$$

ce qui démontre la stabilité du sous-espace V^λ pour π restreinte à U^0 . Plus généralement, $\pi(u^\xi) v \in V^{\lambda+\xi}$ (proposition 1) et si v est totalisateur on a $\pi(U) v = V$ donc $V \subset \bigoplus_{\xi \in \Gamma} \pi(U^\xi) v$, d'où $\pi(U^\xi) v = V^{\lambda+\xi}$ et en particulier $\pi(U^0) v = V^\lambda$. Puisqu'une représentation est irréductible si et seulement si tout vecteur est totalisateur, la proposition est démontrée.

Notons que pour les représentations $(\pi|_{U^0}, V^\lambda)$ ci-dessus, les images des éléments de $U(\mathfrak{h})$ sont des opérateurs scalaires. Une représentation de U^0 qui a cette propriété sera dite $\mathfrak{h}$ - scalaire (de type λ si $\pi(H) = \lambda(H) \cdot \text{Id}$). Dans les propositions qui suivent, nous allons voir qu'inversément, étant donné une représentation irréductible quelconque de U^0 , il existe une représentation $\mathfrak{h}$ - diagonale irréductible unique de U qui contient la représentation donnée de U^0 . Les propositions (2.8) et (2.9) éclairent la construction.

Rappelons tout d'abord que les idéaux maximaux de $U(\mathfrak{h})$ sont en correspondance biunivoque avec les caractères de $U(\mathfrak{h})$ (voir N°1 ; mais résulte aussi du théorème de Hilbert) et qu'un caractère χ de $U(\mathfrak{h})$ est univoquement déterminé par ses valeurs sur $\mathfrak{h}$ ($\chi(1) = 1$). On a donc une correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux de $U(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{h}^*$, et on note χ_λ le caractère de $U(\mathfrak{h})$ associé à la forme $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (χ_λ est l'évaluation en λ des polynômes $h \in U(\mathfrak{h})$).

Proposition (2.8)*. Les représentations P - cycliques (respectivement $\mathfrak{h}$ - diagonales irréductibles) de $U(\mathfrak{g})$ sont exactement celles qui sont de la forme $U(\mathfrak{g})/M$, où M est un idéal à gauche (respectivement maximal) de $U(\mathfrak{g})$ contenant un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$.

* Voir O. Borel [0].

Démonstration. Soit (π, V) une représentation de $U(\mathfrak{g})$ admettant un vecteur totalisateur de poids λ , et soit $M = \{u \in U, \pi(u)v = 0\}$ l'annulateur de v . M est un idéal à gauche qui contient l'idéal maximal $\ker(\chi_\lambda)$ de $U(\mathfrak{g})$ puisque pour $h \in U(\mathfrak{g})$ $\pi(h)v = \chi_\lambda(h)v$. Inversément, si M contient l'idéal maximal $\ker(\chi_\lambda)$ de $U(\mathfrak{g})$, l'élément $\bar{v} \in U/M$ est totalisateur et de poids λ , car $H \cdot \bar{v} = \bar{H} = \lambda(H)\bar{v}$.

Proposition (2.2). Soit M un idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ contenant l'idéal maximal $\ker(\chi_\lambda)$ de $U(\mathfrak{g})$.

- (i) On a $M = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$ et $M \supset U(\mathfrak{g}) (M \cap U^0)$ où $U(\mathfrak{g}) (M \cap U^0)$ désigne l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $M \cap U^0$.
- (ii) La décomposition en poids de U/M est donnée par l'isomorphisme canonique $U/M \cong \bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi / U^\xi \cap M$, le sous-espace $U^\xi / U^\xi \cap M$ étant de poids $\lambda + \xi$.

La représentation de U^0 dans le sous-espace de poids $\lambda + \xi$ est équivalente au quotient des représentations canoniques de U^0 dans U^ξ et dans $M \cap U^\xi$.

Démonstration. (i) Ecrivons $m = \sum_{\xi \in \Gamma} m^\xi$ la décomposition de $m \in M$ dans $U = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi$. Les éléments $\bar{m}^\xi = m^\xi \cdot \bar{v}$ sont de poids $\lambda + \xi$ dans U/M donc linéairement indépendants. Par conséquent, de $0 = \bar{m} = \sum_{\xi} \bar{m}^\xi$ on tire $m^\xi \in M$, d'où $M = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$. Si $u = \sum u_i m_i$ est un élément de $U(M \cap U^0)$, on a $\bar{u} = u \cdot \bar{v} = \sum u_i m_i \cdot \bar{v} = 0$ puisque $\bar{m}_i \cdot \bar{v} = \bar{m}_i = 0$. Ceci implique bien $M \supset U(M \cap U^0)$.

(ii) Puisque $M = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$, l'application de U sur $\bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi / U^\xi \cap M$ donnée par $u = \sum_{\xi} u^\xi \mapsto \sum_{\xi} (u^\xi \bmod M \cap U^\xi)$

est linéaire, de noyau M ; elle se factorise par conséquent en une bijection linéaire $Q: U/M \longrightarrow \bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi / U^\xi \cap M$. Soit alors $v \in U^\xi$, $\bar{v}^{M^\xi}$ sa classe dans $U^\xi / U^\xi \cap M$ et notons provisoirement π la représentation

U/M et π sa réalisation équivalente dans la somme $\bigoplus_{\xi \in \Gamma} U^\xi / U^\xi \cap M$. On a

$$\begin{aligned}\pi(H) \overline{v}^M &= \overline{H \cdot v}^M = \overline{\text{ad}_U(H)} \overline{v}^M + \overline{v \cdot H}^M \\ &= \xi(H) \overline{v}^M + \overline{v \cdot H - \lambda(H)}^M + \lambda(H) \overline{v}^M \\ &= (\xi + \lambda)(H) \overline{v}^M\end{aligned}$$

donc

$$\tilde{\pi}(H) \overline{v}^{M^\xi} = Q \pi(H) \overline{v}^M = (\xi + \lambda)(H) Q \overline{v}^M = (\xi + \lambda)(H) \overline{v}^{M^\xi},$$

Enfin, si $u \in U^0$, on a

$$\pi(u) \overline{v}^{M^\xi} = Q \pi(u) \overline{v}^M = Q \overline{uv}^M = \overline{uv}^{M^\xi}$$

puisque $uv \in U^\xi$. Ceci montre que la représentation de $U^0: (\pi|_{U^0}, (U/M)^{\lambda+\xi})$ est équivalente à la représentation quotient de la représentation naturelle dans U^ξ (multiplication à gauche) par la sous-représentation $M \cap U^\xi$. C.Q.F.D.

Remarque. On voit en outre qu'un idéal M à gauche de $U(\mathfrak{g})$ contenant un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$ est stable par $\text{ad}_U(U(\mathfrak{h}))$. En effet, avec les notations ci-dessus :

$$\text{ad}_U(H) m = \sum_{\xi} \text{ad}_U(H) m^\xi = \sum_{\xi} \xi(H) m^\xi$$

est dans M .

Proposition (2.10). L'idéal à gauche $M = U \cdot M'$ de $U(\mathfrak{g})$ engendré par un idéal à gauche M' de U^0 est un idéal strict de $U(\mathfrak{g})$.

On a $M = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$ et $M \cap U^0 = M'$.

Démonstration. Soit $x = \sum_i u_i m'_i$ un élément de M et posons $u_i = \sum_{\xi} u_i^\xi$

Puisque $\sum_i u_i^\xi m'_i$ est dans $U^\xi \cap M$ (Chap II. proposition (5.2)) de

$x = \sum_i u_i m'_i = \sum_{\xi} (\sum_i u_i^\xi m'_i)$ on tire que $M \subset \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$ donc

$M = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} M \cap U^\xi$. Si $x \in M \cap U^0$, on a $x = \sum_i (\sum_{\xi} u_i^\xi m'_i) \in U^0$, donc

$\sum_i u_i^\xi m'_i = 0$ pour $\xi \neq 0$, et $x = \sum_i u_i^0 m'_i \in M'$ d'où $M \cap U^0 = M'$.

C.Q.F.D.

Proposition (2.11). Soit M' un idéal de U° contenant un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$, disons $\ker(\chi_\lambda)$. La représentation $U(\mathfrak{g})/M$, où $M = U \cdot M'$ est l'idéal à gauche engendré par M' dans $U(\mathfrak{g})$ est $\mathfrak{h}$ -diagonale et contient la représentation U°/M' en ce sens que la représentation de U° dans $(U/M)^\lambda$ est équivalente à U°/M' .

Démonstration. La représentation de U° dans $(U/M)^\lambda$ est équivalente à la représentation quotient de U° :

$$U^\circ /_{M \cap U^\circ} = U^\circ /_{M'} \quad (\text{prop. 9 et 10})$$

Proposition (2.12). Tout idéal à gauche maximal de U° contient un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$; autrement dit, toute représentation irréductible de U° est $\mathfrak{h}$ -scalaire.

Démonstration. Soit M' un idéal à gauche maximal de U° . M' est l'annulateur de $\bar{1}$ dans la représentation irréductible U°/M' . Or, si $\pi : U^\circ \rightarrow \text{End}(V)$ est une représentation irréductible de U° , il résulte du théorème de Dixmier (corollaire (1.2)) que π est nécessairement scalaire sur le centre de U° . Comme $U^\circ \supset U(\mathfrak{h})$ et est précisément le centralisateur de $U(\mathfrak{h})$ dans $U(\mathfrak{g})$ (chap. II, prop. (5.4)) π est scalaire sur $U(\mathfrak{h})$, et par conséquent $\pi(h) = \chi_\lambda(h) \text{Id}_V$ pour $h \in U(\mathfrak{h})$, où χ_λ est le caractère de $U(\mathfrak{h})$ associé à un certain $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Ceci implique que l'annulateur d'un élément quelconque de V contient l'idéal $\ker(\chi_\lambda)$. La démonstration est achevée.

Proposition (2.13). Soit M' un idéal à gauche maximal de U° . Il existe un idéal à gauche maximal unique de U , noté $\tilde{M}$ qui contient M' . On a $\tilde{M} \cap U^\circ = M'$.

Démonstration. Soit M l'idéal à gauche dans U engendré par M' . Les idéaux à gauche de U contenant M' sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces de U/M stables pour la représentation canonique.

Puisque M' est maximal dans U° , il contient un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$, disons $\ker(\chi_\lambda)$, (proposition (2.12)) la représentation U/M

est ℓ -diagonale et la représentation de U^0 dans $(U/M)^\lambda$ est équivalente à la représentation irréductible U^0/M' (proposition (2.11)).

Soit alors V un sous-espace stable dans U/M . on a $V = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} V \cap (U/M)^{\lambda+\xi}$ — démonstration de la proposition (2.5) — et $V^{\lambda+\xi} = V \cap (U/M)^{\lambda+\xi}$ est U^0 -stable de sorte que V^λ est nul ou égal à $(U/M)^\lambda$ à cause de l'irréductibilité de ce dernier. Si $V^\lambda = (U/M)^\lambda$, $\exists v \in V$ donc $V = U/M$. Il en résulte que si V est strictement contenu dans U/M on a $V \subset \bigoplus_{\xi \neq 0} (U/M)^{\lambda+\xi}$, et que la somme $\tilde{V}$ des sous-espaces stables stricts est encore stricte; $\tilde{V}$ est donc l'unique sous-espace stable maximal de U/M et $\tilde{M} = \{u \in U, \bar{u} \in V\}$ l'unique idéal à gauche maximal de U contenant M' . L'idéal M' est maximal dans U^0 , $\tilde{M}$ contient M' et ne contient pas 1, donc $\tilde{M} \cap U^0 = M'$. C.Q.F.D.

Théorème (2.14). Soit π une représentation irréductible de U^0 . Il existe une représentation ℓ -diagonale irréductible $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ de U , unique à équivalence près, qui contient π , en ce sens que π est équivalente à l'une des représentations irréductibles de U^0 : $(\tilde{\pi}, \tilde{V}^*)_{\mu \in \mathbb{P}_\ell}$.

Démonstration. L'existence résulte de la proposition (3.13). En effet soit M' l'annulateur d'un élément de l'espace de la représentation irréductible (π, V) de U^0 ; M' est un idéal à gauche maximal de U^0 , on peut supposer que M' contient l'idéal maximal $\ker(\chi_\lambda)$ de $U(\ell)$. Si $\tilde{M}$ est l'unique idéal à gauche maximal de U qui contient M' , la représentation $U/\tilde{M}$ est irréductible ℓ -diagonale, contient le poids λ , et l'on a les isomorphismes de U^0 -modules (proposition (2.9))

$$(U/\tilde{M})^\lambda \cong U^0/\tilde{M} \cap U^0 \cong U^0/M' \cong (\pi, V)$$

Unicité. Le raisonnement qui suit est adapté d'une démonstration analogue de Serre ([12] chapitre 7, N° 3). Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations ℓ -diagonales irréductibles de U qui contiennent la même représentation irréductible de U^0 . De façon précise, notons $V_i = \bigoplus_{\xi \in \Gamma} V_i^{\lambda+\xi}$ la décomposition en sous-espaces de poids de V_i , $i=1,2$, et supposons l'existence d'un isomorphisme $\phi: V_1^\lambda \longrightarrow V_2^\lambda$ entre les U^0 -modules

canoniques V_1^λ et V_2^λ . Dans la somme directe (π, V) de (π_1, V_1) et de (π_2, V_2) , le vecteur $v = v_1 + \phi v_1$, où $v_1 \in V_1^\lambda$, est non nul et de poids λ :

$$\pi(H)v = \pi_1(H)v_1 + \pi_2(H)\phi v_1 = \pi_1(H)v_1 + \phi \pi_1(H)v_1 = \lambda(H)v ;$$

soit alors E la sous-représentation de V engendrée par v , $E^\lambda(\{0\})$ le sous-espace des vecteurs de poids λ , $w = (u)v$ un vecteur quelconque de E et écrivons $u = \sum_{\xi} u^\xi$. On a $\pi(u)v = \sum_{\xi} \pi(u^\xi)v$, où les vecteurs $\pi(u^\xi)v$ non nuls sont de poids $\lambda + \xi$ donc linéairement indépendants. Par conséquent, si $w \in E^\lambda$, il existe un $u \in U^0$ tel que

$$w = \pi(u)v = (\pi_1 \oplus \pi_2)(u)v = \pi_1(u)v_1 + \phi \pi_1(u)v_1$$

et l'on voit que w se décompose dans $V_1^\lambda \oplus V_2^\lambda$ et que ses composantes s'annulent simultanément. D'où $E^\lambda \cap V_i^\lambda = \{0\}$ pour $i = 1, 2$. Considérons maintenant l'homomorphisme de U -module $f_2 : E \longrightarrow V_2$ induit par la projection $\text{pr}_2 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_2$.

f_2 est surjectif, puisque $f_2(v) = f_2(v_1 + \phi v_1) = \phi v_1 \neq 0$ et que ϕv_1 engendre V_2 puisque ce dernier est irréductible ; f_2 est injectif puisque $\ker(f_2) = V_1 \cap E$ est un sous U -module strict de V_1 donc nul. Le fait que $V_1 \cap E$ soit strict résulte de ce que, par construction de E , on a $V_1^\lambda \cap E = V_1^\lambda \cap E^\lambda = \{0\}$. Il est clair que de même $f_1 : E \longrightarrow V_1$ induit par pr_1 est un isomorphisme de U -module. Ce qui prouve que les représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont équivalentes. La démonstration est terminée.

La représentation $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ de U , définie au théorème (2.14) est alors appelée la représentation induite à U par la représentation (π, V) de U^0 . En résumé, on voit donc par ce qui précède que :

- 1°) les représentations $\mathfrak{h}$ - diagonales irréductibles de $\mathfrak{g}$ sont exactement celles qui sont induites par les représentations irréductibles de U^0 ;
- 2°) les représentations $\mathfrak{h}$ - diagonales irréductibles de $\mathfrak{g}$ classent les représentations irréductibles de U^0 .

Le théorème (2.14) est la généralisation d'un résultat de LEMIRE [7] ; voir également O.Borel [0] .

Donnons encore quelques remarques concernant la construction précédente.

Proposition (2.15). Soit M' un idéal à gauche de U^0 , supposons que M' soit de codimension finie dans U^0 et contienne un idéal maximal de $U(\frac{1}{\mathfrak{p}})$, disons $\ker(\chi_\lambda)$, et notons encore $M = UM'$ l'idéal engendré à gauche par M' dans U . Les sous-espaces de poids de la représentation U/M sont tous de dimension finie, et ceci est encore vrai pour les sous-représentations et les quotients de U/M .

Démonstration. Notons π la représentation U/M . Puisque $\pi(U^0)\bar{1} = (U/M)^\lambda \cong U^0/M$, est de dimension finie par hypothèse, il existe des éléments $u_1^0, \dots, u_n^0$ en nombre fini dans U^0 tels que $\pi(u_1^0)\bar{1}, \dots, \pi(u_n^0)\bar{1}$ forment une base de $(U/M)^\lambda$. On sait que $(U/M)^{\lambda+\xi} = \pi(U^\xi)\bar{1}$ (proposition (2.2), démonstration); en outre, on a démontré (voir les propositions (5.5), (5.6) et (5.7) du chap. II) que les éléments F -minimaux de U^ξ noté $u_1, \dots, u_k$ sont des générateurs de U^ξ comme U^0 -module à droite. Soit alors $w \in (U/M)^{\lambda+\xi}$, $u \in U^\xi$ tel que $\pi(u)\bar{1} = w$, et écrivons $u = \sum_{j=1}^k u_j c_j^0$ avec $c_j^0 \in U^0$ pour $j = 1, \dots, k$.

On a alors

$$\pi(c_j^0)\bar{1} = \sum_{i=1}^n a_{j,i} \pi(u_i^0)\bar{1}$$

$$\text{donc } w = \pi(u)\bar{1} = \sum_{j=1}^k \pi(u_j c_j^0)\bar{1} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n a_{j,i} \pi(u_i u_j^0)\bar{1}$$

ce qui démontre la proposition.

Corollaire (2.16). Soit (π, V) une représentation $\mathfrak{h}$ -diagonale irréductible de $\mathfrak{g}$; si l'un des sous-espaces de poids V^λ , $\lambda \in P_{\mathfrak{p}}$ est de dimension finie, ils le sont tous.

Démonstration. Il résulte de (2.14) que (π, V) peut être obtenue à partir de l'une quelconque des représentations $(\pi|_{U^0}, V^\lambda)$ $\lambda \in P_{\mathfrak{p}}$. La démonstration se résume donc à appliquer la proposition (2.15) à la représentation $(\pi|_{U^0}, V^\lambda)$ qui est de dimension finie. C.Q.F.D.

* voir LEMIRE [6]

Proposition (2.17). Soit M' un idéal à gauche maximal de U^0 et $M = U \cdot M'$ l'idéal à gauche de U engendré par M' .

- (i) La représentation U/M est indécomposable, et
- (ii) elle possède un caractère infinitésimal.

Démonstration. (i) M' étant un idéal à gauche maximal de U^0 , M' contient un idéal maximal de $U(\mathfrak{h})$, noté $\ker(\chi_\lambda)$. Si U/M est somme directe de deux sous-espaces stables V et W , ou bien $V^\lambda \cap (U/M)^\lambda$, ou bien $W^\lambda \cap (U/M)^\lambda$ égale $(U/M)^\lambda$ à cause de l'irréductibilité du U^0 -module $(U/M)^\lambda$. Par conséquent V ou W contient le vecteur totalisateur $\bar{1}$. Ceci prouve que U/M est indécomposable.

(ii) Soit π la représentation U/M et $z \in \mathfrak{Z}$ un élément du centre de U . L'opérateur $\pi(z)|_{(U/M)^\lambda}$ est scalaire puisque z est dans le centre de U^0 et que $(\pi|_{U^0}, (U/M)^\lambda)$ est une représentation irréductible de U^0 (proposition (2.11) et (1.2)).

Par conséquent $\bar{1} \in U/M$ est un vecteur propre de $\pi(z)$. Comme $\bar{1}$ est totalisateur, on en conclut que $\pi(z)$ est scalaire. C.Q.F.D.

3. Classification des représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, l'algèbre U^0 est commutative, et isomorphe à l'algèbre des polynômes à 2 variables. Nous montrons ici comment, par la théorie qui précède, ceci permet d'obtenir directement la classification des représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Cette classification est connue : voir P. GABRIEL, notes multicolpiées d'un séminaire 1958 (?) Paris.

Soit $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la base de Cartan naturelle de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ associée à $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \cdot H$. On a

$$[H, X] = 2X; \quad [H, Y] = -2Y; \quad [X, Y] = H;$$

On note α l'unique racine positive ($\alpha(H) = 2$) de sorte que les rangs de U sont les formes $n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$. Une base du sous-espace $U^{n\alpha}$ des éléments de rang $n\alpha$, est donnée par exemple par les éléments de la forme

$$\{ Y^p H^q X^r, \quad r - p = n, \quad p, q, r \in \mathbb{N} \}$$

En particulier, les éléments $\{Y^p H^q X^p \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ forment une base de U^0 , de même que la famille des éléments $H^q (YX)^p \mid p, q \in \mathbb{N}$ (chap. 2 proposition 5.3). Comme H commute à YX , ainsi qu'on le vérifie directement, il résulte de ceci que U^0 est l'algèbre commutative $\mathbb{C}[H, YX]$ des polynômes en les deux variables H et YX , et par conséquent, les classes de représentations irréductibles de U^0 sont paramétrées par les couples $(\eta, \vartheta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. En vue de simplifications d'écriture ultérieures, on fait correspondre au couple (η, ϑ) la représentation $\pi_{\eta, \vartheta}$ de U^0 donnée par

$$\pi_{\eta, \vartheta} : \begin{cases} H \mapsto 2\eta \\ YX \mapsto \vartheta \end{cases}$$

L'algèbre U^0 contient l'élément de Casimir $Q = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H + YX$ ($Q \in \mathcal{Z}(U)$). Notons $q = \pi_{\eta, \vartheta}(Q) = \eta^2 + \eta + \vartheta$. Etant donné η , on voit que pour un $q \in \mathbb{C}$ arbitraire, il existe un $\vartheta \in \mathbb{C}$ unique tel que $q = \pi_{\eta, \vartheta}(Q)$: c'est $\vartheta = q - \eta^2 - \eta$. Dès à présent, on considérera les représentations irréductibles de U^0 comme étant paramétrées plutôt par les couples $(\eta, q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$; au couple (η, q) correspond donc la représentation $\pi_{\eta, q}$ donnée par

$$\pi_{\eta, q} : \begin{cases} H \mapsto 2\eta \\ Q \mapsto q \end{cases} \quad \begin{cases} YX \mapsto 1 - \eta^2 - \eta \\ XY \mapsto q - \eta^2 + \eta \end{cases}$$

On sait (proposition (2.14)) que les représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles de U classent les représentations irréductibles de U^0 . Nous allons indiquer quels couples (η, q) appartiennent à une même représentation irréductible $\mathfrak{h}$ -diagonale de $\mathfrak{g}$, ce qui nous donnera une description des diverses classes de représentations $\mathfrak{h}$ -diagonales irréductibles de $\mathfrak{g}$.

Nous aurons besoin d'un lemme. Soit (π, V) une représentation $\mathfrak{h}$ -diagonale irréductible de $\mathfrak{g}$ qui contient la représentation $\pi_{\eta, q}$ de U^0 , autrement dit qui possède le poids $\lambda = \eta\alpha$ et telle que $\pi(Q) = q \text{Id}_V$.

La décomposition de V en sous-espaces $\mathfrak{h}$ -propres est donc de la forme

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{I}} V^{\eta + n\alpha}$$

où $\mathbb{I}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ qui contient 0.

Lemme (3.1).

Avec les hypothèses ci-dessus , on a :

- (i) Si $\pi_{\eta, q'}$ est une représentation irréductible de U^0 contenue dans (π, V) on a nécessairement $\eta' = \eta + n$ $n \in \mathbb{Z}$, et $q' = q$.
- (ii) I est un intervalle de $\mathbb{Z}$ borné ou non , contenant 0 .
- (iii) a) I est de la forme $(\cdot, a]$ $a \in \mathbb{Z}$ est équivalent à $q = (\eta+a)^2 + (\eta+a)$
 b) I est de la forme $[b, \cdot)$ $b \in \mathbb{Z}$ est équivalent à $q = (\eta+b)^2 - (\eta+b)$

Démonstration.

(i) est clair.

(ii) Montrons que si $n \in I$ et $n+1 \notin I$, alors $n+m \notin I$ pour $m > 0$.

Soit donc $0 \neq v \in V^{(\eta+n)\alpha}$. Par hypothèse $V^{(\eta+n+1)\alpha}$ est nul , donc

$\pi(X)v = 0$ et par conséquent $\pi(Y^p H^q X^r)v = 0$ pour $r > 0$. Mais v est

totalisateur puisque (π, V) est irréductible , donc V est engendré par les vecteurs $\pi(Y^p H^q)v$ qui sont nuls ou de poids $(\eta+n-p)\alpha$ ce qui prouve

bien que $n+m$ n'est pas dans I pour $m > 0$. Le même raisonnement avec

$\pi(Y)v$ montre que si $n \in I$ et $n-1 \notin I$ alors $n-m \notin I$ pour $m > 0$. Donc

I est un intervalle de $\mathbb{Z}$.

(iii) Supposons $n \in I$ et soit $v \neq 0$, $v \in V^{(\eta+n)\alpha}$. Il est clair à partir

de ce qui précède que $\pi(X)v \neq 0$ est équivalent à $n+1 \in I$. En faisant le

même raisonnement avec $\pi(Y)$, on obtient que si $n \in I$ et $n+1 \in I$ alors

$\pi(Y)|_{V^{(\eta+n+1)\alpha}} \neq 0$. Il s'ensuit que si $n \in I$, on a les équivalences

$$n+1 \in I \iff \pi(X)v \neq 0 \iff \pi(YX)v = \pi(Y)\pi(X)v \neq 0 ,$$

$$\text{et , puisque } YX = Q - \frac{1}{4} H^2 - \frac{1}{2} H$$

$$n+1 \in I \iff \pi(Q - \frac{1}{4} H^2 - \frac{1}{2} H)v = (q - (\eta+n)^2 - (\eta+n))v \neq 0 ,$$

$$\text{d'où } n+1 \in I \iff q \neq (\eta+n)^2 + \eta+n .$$

De même , puisque $XY = H + YX = Q - \frac{1}{4} H^2 + \frac{1}{2} H$, on a

$$n-1 \in I \iff q \neq (\eta+n)^2 - (\eta+n)$$

C.Q.F.D.

On est ainsi ramené , pour décrire les classes d'équivalences de représentations irréductibles de η , à indiquer , pour chaque élément $(\bar{z}, q) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ les suites de couples consécutifs $(\eta, q) \in (\bar{z}, q)$ appartenant à une même représentation irréductible de η . On sait que ces suites forment une partition de $(\bar{z}, q)$ (proposition (2.14)) et qu'une suite s'interrompt "à droite" en (η, q) si et seulement si $q - \eta^2 - \eta = 0$, et "à gauche" en (μ, q) si et seulement si $q - \mu^2 + \mu = 0$; par conséquent il suffit d'examiner pour chaque $(\bar{z}, q)$ les zéros de l'expression $q - \eta^2 - \eta$ lorsque η parcourt $\bar{z}$. (Le fait qu'une interruption à droite en (η, q) correspond toujours à une interruption à gauche en $(\eta+1, q)$ est confirmé par l'identité $\eta^2 + \eta = (\eta+1)^2 - (\eta+1)$.)

Soit donc $(\bar{z}, q)$ un élément de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.

1^{er} cas. $q - \eta^2 - \eta \neq 0$ pour tous les $\eta \in \bar{z}$.

A l'élément $(\bar{z}, q)$ ne correspond qu'une seule représentation irréductible de η , notée $(\sigma_{\bar{z}, q}, V)$.

On a $V = \bigoplus_{\mu \in \bar{z}} V^{\mu, \alpha}$; cette représentation contient donc toutes les représentations $\pi_{\mu, q}$, $(\mu, q) \in (\bar{z}, q)$ de U^0 .

2^{ème} cas. Soit $\eta \in \bar{z}$ tel que $q - \eta^2 - \eta = 0$. L'existence d'un $\eta' \in \bar{z}$ distinct de η tel que $q - \eta'^2 - \eta' = 0$ est équivalente , si on pose $\eta' = \eta + n$ à

$$\eta^2 + \eta - \eta'^2 + 2\eta n + n^2 + \eta + n = 0, \quad n \neq 0$$

$$\text{donc à} \quad 2\eta + n + 1 = 0, \quad n \neq 0$$

$$\text{ou encore à} \quad 2\bar{z} = 0 \text{ et } 2\eta + 1 \neq 0.$$

On distingue donc les possibilités suivantes :

a) $q - \eta^2 - \eta = 0$ et $2\bar{z} \neq 0$.

Dans ce cas η est le seul zéro de $q - \eta^2 - \eta$.

Il correspond à $(\bar{z}, q)$ deux représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$, à savoir :

$(\sigma_{\bar{z}, q}^-, V)$ correspondant à la suite $(\mu, q) \in (\bar{z}, q) \quad \mu \leq \eta;$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta-n)\alpha}$$

$(\sigma_{\bar{z}, q}^+, V)$ correspondant à la suite $(\mu, q) \in (\bar{z}, q) \quad \mu \geq \eta + 1;$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta+n+1)\alpha}$$

b) $q - \eta^2 - \eta = 0$ et $2\bar{z} = 0$, $2\eta + 1 \neq 0$

Dans ce cas on a aussi $q - (-\eta - 1)^2 - (-\eta - 1) = 0$ et on peut supposer $\eta \neq 0$. Il correspond à $(\bar{z}, q)$ trois représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$:

$(\sigma_{\bar{z}, q}^-, V)$ correspondant à la suite $(\mu, q) \in (\bar{z}, q) \quad \mu \leq -\eta - 1;$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{-(\eta+n+1)\alpha}$$

$(\sigma_{\bar{z}, q}^0, V)$ correspondant à la suite $(\mu, q) \in (\bar{z}, q) \quad -\eta \leq \mu \leq \eta;$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{0 \leq n \leq 2\eta} V^{(\eta-n)\alpha}$$

$(\sigma_{\bar{z}, q}^+, V)$ correspondant à la suite $(\mu, q) \in (\bar{z}, q) \quad \mu \geq \eta + 1;$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta+n+1)\alpha}$$

c) $q - \eta^2 - \eta = 0$ et $2\bar{z} = 0$, $2\eta + 1 = 0$ c'est-à-dire $\eta = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{4}$

C'est le cas $(\bar{z}, q) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ auquel correspond deux représentations :

$(\sigma_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}^-, V)$ correspondant à la suite $(\mu, -\frac{1}{4}) \in (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) \quad \mu \leq -\frac{1}{2};$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{-(\frac{1}{2}+n)\alpha}$$

$(\sigma_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}^+, V)$ correspondant à la suite $(\mu, -\frac{1}{4}) \in (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) \quad \mu \geq \frac{1}{2};$

$$\text{i.e. } V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\frac{1}{2}+n)\alpha}$$

N. B. Les représentations de dimension finie apparaissent dans le cas 2 b). Ce sont donc les représentations $\sigma_{\bar{z},q}^0$ de ce cas 2 b) .

Tableau récapitulatif des représentations η - diagonales irréductibles

	Conditions sur $(\bar{z}, q) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$	Représentations associées à $(\bar{z}, q)$	Décomposition de V en s-esp. η -propres
1er cas	$q - \eta^2 - \eta \neq 0$ pour tout $\eta \in \bar{\mathbb{Z}}$	$\sigma_{\bar{z},q}$	$V = \bigoplus_{\eta \in \bar{\mathbb{Z}}} V^{\eta\alpha}$
2ème cas	a) Il existe $\eta \in \bar{\mathbb{Z}}$ t.q. $q - \eta^2 - \eta = 0$ et $2\bar{z} \neq 0$	$\sigma_{\bar{z},q}^-$ $\sigma_{\bar{z},q}^+$	$V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta-n)\alpha}$ $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta+n+1)\alpha}$
	b) Il existe $\eta \in \bar{\mathbb{Z}}$ t.q. $q - \eta^2 - \eta = 0$ et $\bar{z} = 0$ ou $\frac{1}{2}$, $2\eta + 1 \neq 0$	$\sigma_{\bar{z},q}^-$ $\sigma_{\bar{z},q}^0$ (dim. finie) $\sigma_{\bar{z},q}^+$	$V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{-(\eta+n+1)\alpha}$ $V = \bigoplus_{0 \leq n \leq 2\eta} V^{(\eta-n)\alpha}$ $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\eta+n+1)\alpha}$
	c) $(\bar{z}, q) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	$\sigma_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}^-$ $\sigma_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}^+$	$V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{-(\frac{1}{2}+n)\alpha}$ $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{(\frac{1}{2}+n)\alpha}$

Les représentations irréductibles de η que l'on a classées peuvent donc s'obtenir à partir de l'une des représentations de U^0 qu'elles contiennent . On peut cependant exhiber directement les représentations comme suit . Soit (μ, q) , $\mu = \eta + n$ $n \in \mathbb{I}$ la suite des couples correspondant à la représentation considérée . On construit l'espace vectoriel V , engendré librement sur $\mathbb{C}$ par la famille d'éléments indexés par $\mathbb{I}$:

$e_{2(\eta+n)}$, $n \in I$, et on définit $\pi(H)$, $\pi(X)$ et $\pi(Y)$ par :

$$\pi(H) e_{2(\eta+n)} = 2(\eta+n) e_{2(\eta+n)}$$

$$\pi(X) e_{2(\eta+n)} = \sqrt{q-(\eta+n)^2-(\eta+n)} e_{2(\eta+n+1)}$$

$$\pi(Y) e_{2(\eta+n)} = \sqrt{q-(\eta+n)^2+(\eta+n)} e_{2(\eta+n-1)}$$

(détermination principale de la racine). On vérifie que cela définit bien une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ et que c'est la représentation cherchée. L'irréductibilité résulte du fait que si V' est un sous-espace invariant $\neq 0$ de V , il contient nécessairement l'un des $e_{2(\eta+n)}$, ceux-ci étant des vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes de $\pi(H)$. Comme les $e_{2(\eta+n)}$ sont tous totalisateurs de façon évidente, cela implique $V' = V$.

4. Exemples de représentations non $\mathfrak{h}$ -diagonales.

La proposition (2.8) permet d'obtenir facilement des exemples de représentations non $\mathfrak{h}$ -diagonales d'une algèbre de Lie semi-simple. Soit u un élément de rang $\xi \neq 0$ dans l'algèbre enveloppante U de $\mathfrak{g}$. L'élément $u - k \cdot 1$, $k \neq 0$ ($k \in \mathbb{C}$) n'étant pas inversible, puisque seuls les scalaires le sont (P.B.W. chap II Corollaire (1.8)) il existe un idéal à gauche M (et par conséquent un idéal à gauche maximal) qui contient $u - k$. Or, si M est un idéal à gauche qui contient $u - k$ la représentation U/M n'est pas $\mathfrak{h}$ -diagonale.

En effet, pour $H \in \mathfrak{h}$, on a

$$\begin{aligned} (u - k)(a + bH) &= (a + bH)(u - k) - \text{ad}_U(a + bH)(u - k) \\ &= (a + bH)(u - k) - b\xi(H)u \end{aligned}$$

de sorte que, si $\xi(H) \neq 0$ et $a + bH \in M$, ($\Rightarrow b \neq 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= (u - k)(a + bH) \mod M \\ &= -b\xi(H)u \mod M \\ &= -bk\xi(H) \mod M \end{aligned}$$

Ceci implique $1 \in M$, ce qui est absurde. Si donc H vérifie $\xi(H) \neq 0$, l'idéal M ne contient pas le sous-espace de dimension 2 :

$M = \{a + bH ; a, b \in \mathbb{C}\}$ de $U(\mathfrak{h})$ et par conséquent $M \cap U(\mathfrak{h})$ n'est pas maximal.

On veut maintenant exhiber pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ une représentation irréductible qui n'est $\mathfrak{h}$ -diagonale pour aucune des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la base de Cartan naturelle de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$: $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$, $[X, Y] = H$. Comme X est de rang α dans U , si M est un idéal à gauche de U qui contient $X - k$, $k \neq 0 \in \mathbb{C}$, alors la représentation U/M n'est pas $\mathfrak{h}$ -diagonale ; de façon précise, le calcul précédent montre que M ne contient pas le sous-espace $\{a + bH ; a, b \in \mathbb{C}\}$. Nous allons voir qu'en réalité U/M n'est $\mathfrak{h}$ -diagonale pour aucune des sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

Montrons d'abord que pour le sous-espace U_1 des polynômes de U de degré inférieur ou égal à 1 on a $M \cap U_1 = \mathbb{C} \cdot (X - k)$.

Soit $v = aY + bH + cX + d$ un élément de U_1 . On a

$$\begin{aligned} (X - k)v &= \text{ad}_U(X - k)v + v \cdot (X - k) \\ &= aH - 2bX + v \cdot (X - k) \end{aligned}$$

Par conséquent, si $v \in M \cap U_1$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (X - k)v \quad \text{mod } M \\ aH - 2bX &\quad \text{mod } M \\ aH - 2bk &\quad \text{mod } M \end{aligned}$$

d'où $aH - 2bk \in M$ ce qui n'est pas possible, à moins que $a = b = 0$! En outre si $v = cX + d$ est dans M et $-kc \neq d \neq 0$, $\frac{kc}{d}X + k \in M$ implique $X \in M$ puisque $X - k \in M$; ceci est absurde. Il en résulte que seuls les éléments de la forme $\mathbb{C} \cdot (X - k)$ sont dans $M \cap U_1$.

Or on sait que les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont toutes de la forme $\mathbb{C} \cdot g$ où g est un élément régulier de $\mathfrak{g}$. De plus on sait que

si U/M possède des poids pour une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \cdot g$, alors M contient un idéal maximal de $U(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[g]$, et par conséquent un élément de la forme $g - q$, $q \in \mathbb{C}$ et g régulier. Ceci n'est donc pas possible, puisque X est nilpotent et que $M \cap U_1 = \mathbb{C} \cdot (X - k)$. (Notons encore que cette dernière égalité implique que si $k' \neq k$ et M' est un idéal à gauche de U qui contient $X - k'$, alors M et M' sont distincts).

Donnons finalement un exemple de représentation $\mathfrak{h}$ -diagonale irréductible de $\mathfrak{g}$ qui ne possède pas de poids relativement à une autre sous-algèbre de Cartan. Cette représentation doit nécessairement être de dimension infinie, voir proposition (2.6).

Soit toujours $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et reprenons les notations ci-dessus : $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \cdot H$ est la sous-algèbre et Y, H, X la base de Cartan considérée.

Dans l'espace de dimension infinie V de base $\{e_i, i=0, 1, \dots, n, \dots\}$ on considère la représentation admettant le "poids dominant" $-\alpha$ (voir No 5 ci-après) donnée par :

$$\pi(Y) e_n = e_{n+1}$$

$$\pi(H) e_n = -2(n+1) e_n$$

$$\pi(X) e_n = -n(n+1) e_{n-1}$$

C'est une représentation de la classe $\sigma_{0,0}^-$ dans la classification du No 3.

L'élément $W = H + 2Y$ est un élément régulier de $\mathfrak{g}$; on vérifie en effet que $[W, Y] = -2Y$; $[W, W] = 0$; $[W, X-H-Y] = +2(X-H-Y)$ (W est d'ailleurs l'image de H par l'automorphisme $\phi = e^{\text{ad} Y}$ de $\mathfrak{g}$).

Montrons que l'opérateur $\pi(W)$ n'a pas de valeurs propres. Soit $v \in V$ un vecteur quelconque $\neq 0$, et écrivons $v = \sum_0^M a_n e_n$, $a_M \neq 0$. On a

$$\pi(W) e_n = -2(n+1) e_n + 2 e_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad \pi(W) v &= \sum_0^M a_n (-2(n+1) e_n + 2 e_{n+1}) \\ &= -2 a_0 e_0 + \sum_1^M (-2(n+1) a_n + 2 a_{n-1}) e_n + 2 a_M e_{M+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que v n'est un vecteur propre de $\pi(W)$ pour aucune valeur $\lambda \in \mathbb{C}$.

Par conséquent la représentation π ne possède pas de poids relativement à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}' = \mathbb{C} \cdot W$. (Ceci donne en outre un autre exemple de représentation irréductible non diagonale relativement à une sous-algèbre de Cartan .

5. Existence de représentations irréductibles $\mathfrak{h}$ - diagonales : les représentations admettant un poids dominant .

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ l'ensemble des racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On choisit un ordre sur Δ et on reprend les notations du chap. 2 N° 5 ; en particulier on note $\Delta^+ = \{ \beta_1, \dots, \beta_n \}$ les racines positives et $\Sigma = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_l \}$ les racines simples associées à l'ordre choisi .

On a vu au N° 2 (proposition (2.12) et (2.14)) que pour obtenir des représentations $\mathfrak{h}$ - diagonales irréductibles il suffit de citer des idéaux à gauches maximaux de U^0 . On veut montrer ici qu'on obtient la classe bien connue des représentations irréductibles admettant un poids dominant à partir des idéaux à gauches maximaux contenant l'idéal $U_{\mathbb{N}^+} \cap U^0$ que l'on note $U^{\dagger}$.

Soit M' un idéal à gauche maximal de U^0 contenant $U^{\dagger}$. Il résulte de la décomposition $U^0 = U(\mathfrak{h}) \oplus U^{\dagger}$ (proposition (5.4) chap. II) et de la proposition (2.12) du chap. III que M' est de codimension 1 dans $U(\mathfrak{h})$, donc de codimension 1 dans U^0 . Si on note $\ker(\chi_{\omega}) = M' \cap U(\mathfrak{h})$ on a donc $M' = \ker(\chi_{\omega}) \oplus U^{\dagger}$; il est d'ailleurs clair que

$$\omega \mapsto M'_{\omega} = \ker(\chi_{\omega}) \oplus U^{\dagger}$$

est une bijection de $\mathfrak{h}^*$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de U^0 qui contiennent $U^{\dagger}$.

L'idéal à gauche J_{ω} de U engendré par les éléments $\{ \ker(\chi_{\omega}) \text{ et } \mathbb{N}^+ \}$ est un idéal strict de U qui contient M'_{ω} . En effet, $J_{\omega} \cap U^0 \supset M'_{\omega}$ et, si $u = \sum_i u_i h_i + \sum_j u_j X_j$, $h_i \in \ker(\chi_{\omega})$, $X_j \in \mathbb{N}^+$ est dans U^0 , on a, en écrivant $v = \sum_{\xi} v^{\xi}$ la décomposition de $v \in U$ selon les sous-espaces de rang U^{ξ} ,

$$u = \sum_{\xi} u^{\xi} = \sum_{\xi} \left(\sum_i u_i^{\xi} h_i + \left(\sum_j u_j X_j \right)^{\xi} \right) = u^0$$

d'où $u = \sum_i u_i^0 h_i + (\sum_j u_j X_j)^0 \in M'_\omega$
 puisque $\sum_i u_i^0 h_i \in M'_\omega$ et $(\sum_j u_j X_j)^0 \in U^+$; par conséquent $J_\omega \cap U^0 = M'_\omega$.

Soit alors $\tilde{M}_\omega$ l'idéal à gauche maximal unique de U contenant M'_ω .
 D'après ce qui précède, $\tilde{M}_\omega$ contient J_ω donc $U_{\mathbb{A}^+}$, et par conséquent
 les sous-espaces U^ξ , $\xi \in \Gamma - \{\mu = -\sum_{i=1}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{N}\}$. La représen-
 tation irréductible $\mathfrak{h}$ -diagonale $U/\tilde{M}_\omega$, notée π_ω , et déterminée par
 M'_ω , a donc les propriétés supplémentaires

- 1) les poids de π sont de la forme $\omega - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{N}$
- 2) $\pi_\omega(X_\beta) \bar{1} = 0$ quel que soit $\beta \in \Delta^+$.

Définition.

Soit (π, V) une représentation de $\mathfrak{g}$. Un élément
 $v \in V$ est dit primitif de poids ω si

- 1) $v \neq 0$ est de poids ω
- 2) $\pi(X_\beta) v = 0$ pour tout $\beta \in \Delta^+$.

Si une représentation (π, V) est irréductible et possède un vecteur primitif
 de poids ω , il est clair qu'elle est $\mathfrak{h}$ -diagonale et que ces poids sont
 de la forme $\omega - \sum_i n_i \alpha_i, n_i \in \mathbb{N}$. On dit alors que ω est le poids
 dominant.

Proposition (5.1). La correspondance $\omega \mapsto U/\tilde{M}_\omega$ est une bijection de $\mathfrak{h}^*$
 sur l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ admettant
 un poids dominant.

Démonstration. Nous avons vu ci-dessus que $\bar{1} \in U/\tilde{M}_\omega$ est primitif de poids
 ω puisque $H = \omega(H)\bar{1} \pmod{\tilde{M}_\omega}$ donc $\pi_\omega(H)\bar{1} = \bar{H} = \omega(H)\bar{1}$. Soit d'autre
 part (π, V) une représentation irréductible admettant un vecteur v primitif
 de poids ω . L'annulateur α de v est un idéal maximal de U qui contient
 $\ker(\chi_\omega)$ et $U_{\mathbb{A}^+}$ donc M'_ω ; par conséquent $\alpha = \tilde{M}_\omega$ et (π, V) est
 équivalente à $U/\tilde{M}_\omega$. Ainsi $\omega \mapsto U/\tilde{M}_\omega$ est surjective.

Supposons maintenant que la représentation $U/\tilde{M}_\omega$ contient la représentation de $U^0 : U^0/M'_\lambda$, $\lambda \neq \omega$; cela implique que $U/\tilde{M}_\omega$ contient un vecteur primitif v' de poids $\lambda \neq \omega$, et par conséquent que

$$\lambda = \omega - \sum_{i=1}^l p_i \alpha_i \quad \text{et} \quad \omega = \lambda - \sum_{i=1}^l p'_i \alpha_i \quad p_i, p'_i \in \mathbb{N},$$

d'où $\sum_{i=1}^l (p_i + p'_i) \alpha_i = 0$, donc $p_i = p'_i = 0$ et $\lambda = \omega$. L'hypothèse

faite est donc absurde, la représentation $U/\tilde{M}_\omega$ ne contient qu'une seule représentation de U^0 de la forme U^0/M'_λ , c'est U^0/M'_ω , de sorte que les représentations $U/\tilde{M}_\omega$, $\omega \in \frac{1}{2}^*$, sont toutes distinctes (prop(2.14)).

Ceci montre l'injectivité de l'application $\omega \mapsto U/\tilde{M}_\omega$ et achève la démonstration.

Remarque. Soit (π, V) une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ admettant un vecteur primitif de poids ω .

- 1) On a vu dans la démonstration de (5,1) que v est, à un multiple scalaire près, l'unique vecteur primitif de (π, V) , et que le poids ω est de multiplicité 1, car M'_ω est de codimension 1 dans U^0 .
- 2) Les poids de (π, V) sont tous de multiplicité finie (proposition (2.15)).

BIBLIOGRAPHIE

- [0] BOREL, Olivier - Sur les représentations $\mathfrak{g}$ -diagonales des algèbres de Lie semi-simples complexes.
C.R. Acad. Sc. Paris, t.275 (1972)
- [1] BOURBAKI, Nicolas - Groupes et algèbres de Lie .Paris, Hermann (1960) .
- [2] BOUWER, I. Z. - Standard representations of simple Lie algebras.
Canad. J. of Math. 20 (1968) p. 344-361
- [3] DIXMIER, Jacques - Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes.
Anais Acad. Brasil Ciencias 35 (1963) p.491-519
- [4] HELGASON, Sigurdur - Differential Geometry and Symmetric Spaces .
New York, Academic Press (1962)
- [5] JACOBSON, Nathan - Lie Algebras . Interscience Tracts N°10
New York, John Wiley (1962)
- [6] LEMIRE, Franz W. - Note on weight spaces of irreducible linear representations.
Canad. Math. Bull. 11 N°3 (1968) p.399-403
- [7] " " - Weight spaces and irreducible representations of simple Lie algebras.
Proc. Amer. Math. Soc. 22 N°1 (1969) p. 192-197
- [8] " " - Existence of weight space decompositions for irreducible representations of simple Lie algebras.
Canad. Math. Bull. Vol. 14 (1) 1971
- [9] QUILLEN, Daniel - On the endomorphism ring of a simple module over an envelopping algebra.
Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969) p. 171-172
- [10] Séminaire Sophus Lie - Théorie des algèbres de Lie - Topologie des groupes de Lie.
Institut Henri Poincaré, Paris (1955)
- [11] SERRE, Jean-Pierre - Lie Algebras and Lie Groups.
New york, Benjamin (1965)
- [12] " " " - Algèbres de Lie semi-simples complexes.
New York, Benjamin (1966)
- [13] STEWART, Ian - Lie Algebras.
Lecture Notes in Mathematics N°127
Springer (1970)

Achevé d'imprimer sur les presses de
l'Imprimerie Cassina S.A. à La Chaux-de-Fonds
le 25 avril 1973.

